

3. Cvičení (16.10.2025)

1) Míra na jednoduše k -ploše $S = \varphi(u)$

$$\mu_S(B) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{\varphi^{-1}(B)} J_K \varphi(u) \, du \quad \left[dx^k(u) \right] \quad B \in \mathcal{B}^n_S \text{ (bord. podmnožina } S)$$

Beispiel: $S = \text{graf } h$, $h: U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{graph } h = \{ (u, h(u)) : u \in U \} \subset \mathbb{R}^n$$

$$\varphi: u \mapsto (u, f(u)) \quad (n-1) - \text{матр } S$$

$$D\varphi(u) = \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ \nabla h(u)^T \end{bmatrix}$$

$$D\varphi(u)^T D\varphi(u) = I_{m-1} + \nabla h(u) \nabla h(u)^T$$

Ukážeme, že

$$\det(D\varphi(u)^T D\varphi(u)) = 1 + \|\nabla h(u)\|^2$$

(Sylvestrův vzorec)

$$\Rightarrow \mu_g \{ (u, h(u)) : u \in B \} = \int_B \sqrt{1 + \| \nabla h(u) \|^2} \, du$$

2) Sylvestrův vzorec:

$$a, b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \det(I_n + ab^T) = 1 + a^T b$$

Dk.: Plyná z Cauchy - Binetova vzorec:

$$A = \begin{pmatrix} I_n \\ a^T \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} I_n \\ b^T \end{pmatrix}$$

3) Spočítejte obsah horní polokoule:

$$S_+^{n-1} = \{ x = (x_1, \dots, x_n) : \|x\|^2 = 1, x_n > 0 \}$$

$$\text{graf } h, \quad h: (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}$$

$$U_{n-1} = \{ (x_1, \dots, x_{n-1}) : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < 1 \}$$

(odvrcené koule v $\mathbb{R}^{n-1}$)

$$\nabla h(x_1, \dots, x_{n-1}) = - \frac{(x_1, \dots, x_{n-1})^T}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}}$$

$$\|\nabla h(x_1, \dots, x_{n-1})\|^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}$$

$$J_{n-1} \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}}$$

$$\boxed{\mu_S(S_+^{n-1}) = \int_{U_{n-1}} \frac{du}{\sqrt{1 - \|u\|^2}}}$$

$$\underline{n=2}: \mu_S(S_f^1) = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi$$

$$\underline{n=3}: \mu_S(S_f^2) = \iint_{\{u^2+v^2 < 1\}} \frac{du dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = 2\pi$$

(polární souřadnice)

$$\underline{\text{a obecně}}: \mu_S(S_f^{n-1}) = \frac{n}{2} \omega_n, \text{ kde}$$

$$\omega_n = \lambda^n(B^n(0,1)) \quad - \text{objem jednotkové koule v } \mathbb{R}^n$$

(plyne z D.Ú. 2).

4) Rotacní plochy v $\mathbb{R}^3$

$S \subset \mathbb{R}^3$ rotacní $\Leftrightarrow S$ má osu symetrie

BÚNO: osa symetrie = osa z.

$$\underline{\text{Př.}}: \varphi(u,v) = (p(u) \cos v, p(u) \sin v, q(u)),$$

$\forall (u,v) \in I \times \mathbb{R}, \quad I \text{ ot. interval}$

$u \mapsto (p(u), q(u))$ reg. par. křivka v $\mathbb{R}^2$

* obrácením φ má osu rotace z

Ověřte: a) Je-li $p > 0$ a $p'^2 + q'^2 > 0$ na I
 pak φ je parametrizovaná 2-plocha
 (rank $D\varphi(u,v) = 2$).

b) Je-li $c: u \mapsto (p(u), q(u))$
 homeomorfismus $I \rightarrow c(I)$,
 pak je $\varphi|_{I \times (-\pi, \pi)}$ 2-mapa.

($u = c^2(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$
 $v = \arg(x, y)$) spojte!

c) Najděte p, q pro případ:

(i) sfery

(ii) jednodílný hyperboloid
 $\{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$