

4. Cvičení (23.10.2025)

- 1) Najděte mapy φ vesledejších ploch S s vlastností $\mu_S(S \setminus \text{im } \varphi) = 0$.

(Pozn.: při lze $\int_S f dS$ počítat jako $\int_{\text{im } \varphi} f dS$.)

(a) $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\} \quad (a > 0)$

(b) $S = \{x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}$

(c) $S = \{-x^2 - y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$

(d) $S = \{z = x^2 - y^2\}$

- 2) Spočítejte plošné integrály:

(a) $\int_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$, kde $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$

(b) $\mu_S(S)$, kde $S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1, |z| \leq 1\}$

$\left[4\pi \int_0^1 \sqrt{1+2t^2} dt = 4\pi \left(\frac{t}{2} \sqrt{1+2t^2} + \frac{1}{2} \sinh^{-1}(\sqrt{2}t) \right) \right]$

(c) $\int_S z dS$, kde $S = \{(u \cos v, u \sin v, v) : 0 < u < a, 0 < v < 2\pi\}$

(šroubová plocha)

$$(d) \int_S (xy + xz + yz) dS, \text{ kde } S = \{z = \sqrt{x^2 + y^2} : x^2 + y^2 < 2ax\}$$

3) Ukážte, že hranice osmistěnné

$$S = \{|x| + |y| + |z| = a\} \quad (a > 0)$$

je zobecněná plocha a spočítejte

$$\int_S (x^2 + y^2 + z^2) dS.$$

Připomeňte def.: zobecněná k -plocha má reprezentaci

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_p \cup M_1 \cup \dots \cup M_q \quad (p \geq 1, q \geq 0),$$

kde S_i jsou ~~to~~ jednoduché k -plochy,
 M_j jsou l_j -plochy s $l_j < k$, a platí

$$S_i \cap \left(\bigcup_{i' \neq i} \overline{S_{i'}} \cup \bigcup_j \overline{M_j} \right) = \emptyset, \quad i = 1, \dots, p.$$

4) Je-li $S \subset \mathbb{R}^m$ zároveň k -plocha a zobecněná k -plocha, pak obě definice μ_S slyňají. Ukážte.

Dk.: $S = S_1 \cup \dots \cup S_p \cup M_1 \cup \dots \cup M_q$
 návod: ukážte, že $\mu_S|_{S_i} = \mu_{S_i}, \quad i = 1, \dots, p$

Pozn.: k -plocha nemusí být zobecněná k -plocha (?)
 (těžké, nepotřebujeme)

5) $M \subset \mathbb{R}^n$ číslo se skoro kladnou křivostí,

tedy:

- M omezená,

- $M = \text{int } M$,

- ∂M je zobecněná $(n-1)$ -plocha.

Nechť $x \in \partial M$ je regulární bod (tedy leží na nějaké $(n-1)$ -ploše S_i z repr.:

$$\partial M = S_1 \cup \dots \cup S_p \cup M_1 \cup \dots \cup M_q$$

Vyjadřete $\nu_M(x)$ (jednot. vektor vnější normály $\nu x \perp M$), pokud je S popsána:

(a) explicitně (jako graf funkce)

(b) parametricky (mapou)

(c) implicitně (rovnice)

(a) $S_i \cap V = \text{graf } h \cap V$ ($V \ni x$ otevř.)

$M \cap V = \text{podgraf } h \cap V$ ($\text{podgraf } h = \{(u, t) : t \leq h(u)\}$)

$$\nu_M(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla h(u)\|^2}} (-\nabla h(u), 1)$$

(b) $S_i \cap V = \varphi(u) \cap V$, $\varphi(u) = x$

$$\nu_M(x) = \pm \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}}(u)}{\| \quad \| \quad \|}$$

$$(c) \quad S_i \cap V = \{F(z) = 0\} \cap V$$

~~$$M \cap V =$$~~

$$\nu_M(x) = \pm \frac{\nabla F(x)}{\|\nabla F(x)\|}$$