

5. cvičení (30. 10. 2025)

1) Torus: rotační plocha $(0 < R < R)$

$$T = \{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$$

mapa:

$$\varphi: \begin{cases} x = (R + r \cos u) \cos v \\ y = (R + r \cos u) \sin v \\ z = r \sin u \end{cases} \quad \begin{cases} u \in (-\pi, \pi) \\ v \in (-\pi, \pi) \end{cases}$$

a) Ukážete, že φ je mapa (Věta 1.2 z předn.),
a že určete $\text{im } \varphi$,

$$? \quad \mu_T(T \setminus \text{im } \varphi) = 0$$

b) Najděte atlas $A = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$
takový, že φ_i jsou určitým stejným
přepisem jako φ , ale na jiném def. oboru.

c) Necht' $M = \{(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$.

Ukážte, že M je těleso se (široko) hladkou

hranicí ... $\partial M = T$

v bodech $\varphi(u, v) \in T$ určete

jednot. vektor vnější normály

$$\nu_M(\varphi(qv)) \in S^2$$

- Spočítejte $\int_T \langle (x, y, z), \nu_M(x, y, z) \rangle dS$

d) Pomocí věty o divergenci spočítejte $\chi^3(M)$:

$$\left[\int_M \operatorname{div} F d\chi^3 = \int_{\partial M} \langle F, \nu_M \rangle dS, \right.$$

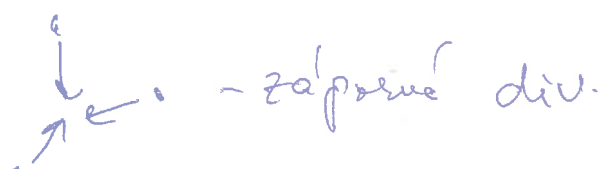
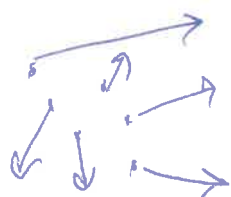
$$\left. \text{volba } F(x, y, z) = (x, y, z) \right]$$

2) Divergence vektorového pole:

$$F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad C^1$$

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \quad \dots, \text{ "rozptávanost" pole}$$

Pr. – mapa směrů a rychlosti vektorů



3) Spočítejte $\int_{\partial M} \langle (x^z, y^z, z^z), \nu \rangle \langle (x, y, z) \rangle dS,$

$$M = [0, a]^3 \quad [3a^4]$$

4) Spočítejte $\int_S \frac{dS}{(1+x+y)^2},$ S je povrch

čtyřstěnu $\{x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

5) Spočítejte plošný obsah množiny

$$S = \{(x, y, z): z = xy, x^2 + y^2 < 4\} \quad \left[\frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 1) \right]$$

6) Těžiště k -plochy $S \subset \mathbb{R}^n$ je def. jako

$$t = \frac{\int_S x dS(x)}{\int_S dS(x)}.$$

Zdůvodnění: při „ucelyení“ plochy S v bodě t působí v bodě $x \in S$ gravitační síla ve směru a velikosti $\langle x - t, v \rangle$, celkový moment síly je tedy $\int_S \langle x - t, v \rangle dS(x) = 0.$

Najděte těžiště plochy $S = \{z = x^2 + y^2 < a\}.$