

6. cvičení (6.11.2025)

1) $f \in \Lambda^k(V)$, $\dim V = n$

antisymetrické k -lineární formy

$v_1, \dots, v_k \in V$ lin. závislé $\Rightarrow f(v_1, \dots, v_k) = 0$.
(ukázat).

(Návod: uvažte ukázat: $f(v_1, v_1, v_3, \dots, v_k) = 0$.)

2) Na $\Lambda^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$

máme bázi $\{e_I^* = dx_I : I \subset \{1, \dots, n\}\}$

(dimenze $= 2^n$)

Vnější součin na $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ je def. pro

prvky báze:

$$e_I^* \wedge e_J^* := \begin{cases} \operatorname{sgn}(I \cup J) e_{I \cup J}^* & , I \cap J = \emptyset, \\ 0 & , I \cap J \neq \emptyset, \end{cases}$$

kde $\operatorname{sgn}(I \cup J)$ je znam. permutace σ na $I \cup J$,
která zobrazuje prvky $|I|$ prvky rost. zp. na I
a zbylé $|J|$ prvky rost. zp. na J .

Operace $\wedge$ je bilineární rozšíření na $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$.

a) ukázat, že $\wedge$ je asociativní.

(b) Ukážte: $f \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n), g \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow f \wedge g \in \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$ a platí

$$(f \wedge g)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \Sigma(k+l)} (\text{sgn } \sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

$$v_1, \dots, v_{k+l} \in \mathbb{R}^n;$$

$$\Sigma(k, l) = \{ \sigma \in \Sigma(k+l) : \sigma(1) < \dots < \sigma(k), \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l) \}.$$

(Návod: (1) obě strany lineární v f i g , tedy stačí ukázat pro $f = e_I^*, g = e_J^*$

(2) linearita v každém argumentu v_i ;

$\leadsto$ stačí ukázat pro $v_i = e_{p(i)}, i \leq k+l$

(3) Invariance na permutace!)

3) Ukážte, že 2-vektor

$$\alpha := e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \Lambda_2(\mathbb{R}^4)$$

není jednoduchý!

(Návod: α jednoduchý $\Rightarrow \alpha = u \wedge v$

$\Rightarrow u \wedge \alpha = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \dots$ spor)

Pozn.: $e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 = e_1 \wedge (e_2 + e_3)$
je jednoduchý!

4) Ukazte:

$$a) u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^m \Rightarrow$$

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_m = \det(u_i^j)_{i,j=1}^m e_1 \wedge \dots \wedge e_m,$$

$$b) u, v \in \mathbb{R}^m \Rightarrow$$

$$u \wedge v = \sum_{i < j} (u_i v_j - u_j v_i) e_i \wedge e_j,$$

$$c) u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m \Rightarrow$$

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_k = \sum_{|I|=k} \det(u_i^j)_{i=1, j \in I}^k e_I$$

(Plückerovy souřadnice)

$$\left(\text{značím: } I \in \{1, \dots, m\}, I = \{i_1 < \dots < i_k\} \right. \\ \left. e_I := e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \right)$$