

8. cvičení (20.11.2025)

11

1) Möbius páspek:

$$\varphi: \begin{cases} x = (1 + \frac{\sqrt{v}}{2} \cos \frac{u}{2}) \cos u \\ y = (1 + \frac{\sqrt{v}}{2} \cos \frac{u}{2}) \sin u \\ z = \frac{\sqrt{v}}{2} \sin \frac{u}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} u \in \mathbb{R} \\ v \in (-1, 1) \end{cases}$$

- není orientovatelný:

$$\varphi(u+2\pi, v) = \varphi(u, -v), \text{ ale}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u+2\pi, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, -v), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u+2\pi, v) = -\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, -v)$$

2) Hodgeho dualita (bude na přednášce):

$$*: \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda_{n-1}(\mathbb{R}^n)$$

def.: $u \wedge (*v) = \langle u, v \rangle e_1 \wedge \dots \wedge e_n, \quad u \in \mathbb{R}^n$

Vlastnosti:

(a) $*$ je lineární izomorfismus

$$(b) *e_i = (-1)^{i-1} e_1 \wedge \dots \wedge e_{i-1} \wedge e_{i+1} \wedge \dots \wedge e_n$$

$$(c) *v = v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \Leftrightarrow v = v_1 \times \dots \times v_{n-1}$$

$$(d) \|*v\| = \|v\|$$

3) $S \subset \mathbb{R}^n$ $(n-1)$ -plocha

$$\nu: S \rightarrow S^{n-1} \text{ spojitel', } \nu(x) \perp T_x S, \quad x \in S$$

(normálové vektorové pole)

$\Rightarrow \tau(x) := * \nu(x)$ je orientace S .

$$4) S = \{x^2 + y^2 = 2z, x > 0, y > 0, z < \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{R}^3$$

orientace : $\langle \nu, e_3 \rangle < 0$

(ν ... normalová pole na S)

Spočítejte $\int_S (y dz \wedge dx)$. $[-\frac{\pi}{4}]$

$$5) S = \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

orientace normalou ν směřující „ven“:

$$\nu(x, y, z) = \frac{1}{a}(x, y, z), (x, y, z) \in S$$

Spočítejte $\int_S (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy)$. $[4\pi a^3]$

$$6) S = \{z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 < 2ax\}$$

orientace : $\langle \nu, e_3 \rangle > 0$

Spočítejte $\int_S y dx \wedge dz$.