

Geometrie 2

LS 2022/23

Jan Rataj

20. června 2023

Přednáška 14.2.2023

0 Úvod

Přednáška bude mít tyto tři části:

1. Plochy v \mathbb{R}^n , tečný prostor, míra na plochách, plošný integrál prvního druhu, Gaussova-Ostrogradského věta.
2. Diferenciální formy v \mathbb{R}^n , integrace diferenciálních forem, Stokesova věta.
3. Základy diferenciální geometrie ploch v \mathbb{R}^3 : hlavní směry a hlavní křivosti plochy, Gaussova a střední křivost, geodetiky.

Připomeňme dvě důležité věty z Matematické analýzy, které budeme opakovane používat. Pro totální diferenciál zobrazení $f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ budeme používat značení $Df(u) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($u \in U$).

Pozn.: *Okolím* bodu p v metrickém prostoru X budeme rozumět libovolnou otevřenou množinu $U \subset X$ obsahující bod p .

Věta 0.1 (Věta o implicitních funkcích). *Bud' $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $F : G \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ zobrazení třídy C^m ($m \geq 1$) a bod $(x_0, y_0) \in G \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ nechť splňuje $F(x_0, y_0) = 0$ a*

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0) \right)_{i,j=1}^{n-k} \neq 0.$$

Pak existují okolí $U \subset \mathbb{R}^k$ bodu x_0 a $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ bodu y_0 taková, že $U \times V \subset G$, a existuje zobrazení $g : U \rightarrow V$ třídy C^m takové, že pro každé $x \in U$, $F(x, g(x)) = 0$ a $g(x)$ je jediným bodem $y \in V$, pro nějž $F(x, y) = 0$.

Věta 0.2 (Věta o inverzním zobrazení). *Bud' $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ zobrazení třídy C^m ($m \geq 1$) a $x_0 \in U$ takový, že matice $Dg(x_0)$ je regulární. Pak existuje okolí $U_0 \subset U$ bodu x_0 takové, že $V_0 := g(U_0)$ je otevřená množina a $g|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ je difeomorfismus třídy C^m (tedy prosté zobrazení a $(g|_{U_0})^{-1}$ je třídy C^m).*

1 Plošný integrál prvního druhu

1.1 Plochy v \mathbb{R}^n

Definice 1.1. (i) *Parametrizovanou k -plochou* (třídy C^m) rozumíme zobrazení $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ třídy C^m definované na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^k$ a splňující $\text{rank } D\varphi(u) = k$, $u \in U$. Neuvedeme-li konkrétní třídu hladkosti C^m , budeme vždy mít na mysli hladkost třídy C^∞ .

(ii) Parametrizovanou k -plochu $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazveme *k -mapou*, jestliže φ je homeomorfismus U na $\varphi(U)$.

Příklady:

1. Regulární parametrizovaná křivka $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ je parametrizovanou 1-plochou.
2. Zobrazení

$$\varphi : (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, u), \quad u > 0, v \in \mathbb{R},$$

je parametrizovaná 2-plocha, ale ne mapa.

3. Ani prostá parametrizovaná plocha nemusí být mapou (příklad bude na cvičení).

Tvrzení 1.1 (Graf funkce je mapa). *Je-li $U \subset \mathbb{R}^k$ otevřená a $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ je třídy C^m ($m \geq 1$), pak zobrazení*

$$\varphi : u \mapsto (u, f(u))$$

je k -mapa třídy C^m (v \mathbb{R}^n).

Důkaz. Je zřejmé, že φ je prosté, třídy C^m a $\text{rank } D\varphi = k$ na U . Zbývá ukázat, že φ^{-1} je spojitý na $\varphi(U)$. φ^{-1} je ovšem restrikcí projekce z \mathbb{R}^n do prvních k souřadnic, tedy jako restrikce spojitého zobrazení je též spojitý. \square

Věta 1.2 (Parametrizovaná plocha je lokálně mapou). *Bud' $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizovaná k -plocha. Pak platí:*

- (i) *Pro každý bod $u \in U$ existuje okolí $U_0 \subset U$ bodu u takové, že restrikce $\varphi|_{U_0}$ je prosté zobrazení.*
- (ii) *Je-li $U_0 \subset U$ omezená otevřená podmnožina taková, že $\overline{U_0} \subset U$, φ je prosté na U_0 a $\varphi(U_0) \cap \varphi(\partial U_0) = \emptyset$, pak $\varphi|_{U_0}$ je k -mapa.*

Důkaz. (i) Protože $\text{rank } D\varphi(u) = k$, je aspoň jedna čtvercová podmatice $D\varphi(u)$ regulární (to je důsledek Cauchy-Binetova vzorce ze cvičení). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u)\right)_{i,j=1}^k$ je regulární. Pak zobrazení $u \mapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_k(u))$ z U do \mathbb{R}^k má regulární diferenciál v bodě u , a podle věty o

inverzním zobrazení je tedy na okolí u difeomorfismem, speciálně tedy prosté. Pak i φ je prosté na tomto okolí.

(ii) Potřebujeme ukázat, že $(\varphi|_{U_0})^{-1}$ je spojitý na $\varphi(U_0)$. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není, tedy že existuje posloupnost $x_i = \varphi(u_i) \in \varphi(U_0)$, $x_i \rightarrow x_0 = \varphi(u_0)$, a přitom $u_i \not\rightarrow u_0$. Množina U_0 je omezená, tedy existuje podposloupnost $u_{\sigma(i)} \rightarrow u' \in \overline{U_0}$, $u' \neq u_0$. Ze spojitosti φ plyne $\varphi(u_{\sigma(i)}) = x_{\sigma(i)} \rightarrow \varphi(u')$, tedy $\varphi(u') = \varphi(u_0)$. Dále podle předpokladu musí ležet i $u' \in U_0$, a protože φ je prosté na U_0 dostáváme $u' = u_0$, tedy spor. \square

Příklad: Zobrazení $\varphi : (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, u)$ je 2-mapa na $(0, K) \times (-\pi, \pi)$ pro libovolné $K > 0$.

Definice 1.2 (plocha). Neprázdnou množinu $S \subset \mathbb{R}^n$ nazveme *k-plochou* (třídy C^m), jestliže ke každému bodu $x \in S$ existuje $V \subset \mathbb{R}^n$ okolí bodu x a k -mapa (třídy C^m) $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ taková, že $\varphi(U) = V \cap S$. Řekneme pak, že každá taková mapa ϕ je mapou plochy S . Speciálně obraz $\text{im } \varphi = \varphi(U)$ jedné k -mapy φ nazveme *jednoduchou k-plochou*.

Pozn.: Podle definice je tedy obraz $\text{im } \varphi$ mapy φ plochy S relativně otevřenou podmnožinou plochy S .

Definice 1.3 (atlas plochy). Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha, pak libovolný soubor \mathcal{A} map plochy S s vlastností $S = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \text{im } \varphi$ nazveme *atlasem* plochy S .

Příklady:

1. Graf funkce $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ třídy C^1 je jednoduchou k -plochou.
2. Množina $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$ je 2-plocha v \mathbb{R}^3 s atlasem $\mathcal{A} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$,

$$\varphi_1(u, v) = \varphi_2(u, v) = (\cos v, \sin v, u),$$

$$\text{dom } \varphi_1 = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi), \text{ dom } \varphi_2 = \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

Přednáška 21.2.2023

Věta 1.3 (Implicitně zadaná plocha). *Bud' $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $f : G \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ zobrazení třídy C^m . Necht' v každém bodě $x \in f^{-1}(\{0\})$ platí $\text{rank } Df(x) = n-k$. Pak $f^{-1}\{0\}$ je k -plocha třídy C^m .*

Důkaz. Necht' $a \in f^{-1}(\{0\})$. Protože $\text{rank } Df(a) = n-k$, existuje regulární čtvercová submatice $Df(a)$ o $n-k$ řádcích (důsledek Cauchy-Binetova vzorce ze cvičení). Budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i=1, j=k+1}^{n-k, n}$$

je regulární. Podle věty o implicitních funkcích existuje okolí U bodu (a_1, \dots, a_k) , okolí V bodu (a_{k+1}, \dots, a_n) a C^1 zobrazení $g : U \rightarrow V$ takové, že $g(a_1, \dots, a_k) = (a_{k+1}, \dots, a_n)$ a

$$\text{graf } g := \{(u, g(u)) : u \in U\} = f^{-1}(\{0\}) \cap (U \times V).$$

Tedy $f^{-1}(\{0\})$ je k -plocha. □

Příklady:

1. Jednotková sféra v \mathbb{R}^n ,

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\},$$

je $(n-1)$ -plocha.

2. Množina

$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

je 2-plocha v \mathbb{R}^4 .

Je-li L lineární podprostor \mathbb{R}^n , pak symbolem L^\perp budeme značit ortogonální podprostor k L ($L^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n : \langle u, v \rangle = 0, u \in L\}$).

Věta 1.4 (plochu lze lokálně parametrizovat jako graf funkce). *Bud' $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha třídy C^m ($m \geq 1$). Pak ke každému bodu $x \in S$ existuje okolí V (v \mathbb{R}^n), k -rozměrný podprostor $L \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset L$ otevřená a zobrazení $h : W \rightarrow L^\perp$ takové, že*

$$\text{graf } h := \{w + h(w) : w \in W\} = S \cap V.$$

Důkaz. Podle definice k -plochy k danému bodu $x \in S$ existuje k -mapa $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow S$ třídy C^m taková, že $\varphi(U)$ je relativně otevřená podmnožina S a $x = \varphi(u)$ pro nějaký $u \in U$. Protože $\text{rank } D\varphi(u) = k$, má $D\varphi(u)$ (podle Cauchy-Binetova vzorce) regulární čtvercovou podmatici $k \times k$, tedy existuje $I \subset \{1, \dots, k\}$, $|I| = k$, tak, že

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u) \right)_{i \in I, 1 \leq j \leq k}$$

je regulární matice. Označme $L := \text{Lin}\{e_i : i \in I\}$, Π nechť je ortogonální projekce z \mathbb{R}^n do L , a $v := \Pi(x)$. Zobrazení $g := \Pi \circ \varphi$ splňuje předpoklady věty o inverzním zobrazení, tedy existuje $U_0 \subset U$ otevřená, $u \in U_0$, taková, že $W := g(U_0) \subset L$ je otevřená a $g : U_0 \rightarrow W$ je difeomorfismus třídy C^m . Položme

$$h : w \mapsto \varphi \circ g^{-1}(w) - w, \quad w \in W.$$

Zřejmě $h : W \rightarrow L^\perp$ je třídy C^m a

$$\{w + h(w) : w \in W\} = \varphi(U_0)$$

je relativně otevřená podmnožina S (neboť φ je homeomorfismus), tedy $\varphi(U_0) = S \cap V$ pro nějakou otevřenou množinu $V \subset \mathbb{R}^n$. \square

Tvrzení 1.5 (lokální uzavřenost plochy). *Každá k -plocha v \mathbb{R}^n je lokálně uzavřená množina, tedy lze ji vyjádřit jako průnik otevřené a uzavřené podmnožiny \mathbb{R}^n . Ekvivalentně lze říci, že S je relativně otevřená ve svém uzávěru \bar{S} . Speciálně je tedy k -plocha borelovská podmnožina \mathbb{R}^n .*

Důkaz. Ukážeme, že S je relativně otevřená v uzávěru \bar{S} . Nechť $x \in S$ a $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow S$ je k -mapa taková, že $x = \varphi(u)$ pro nějaký $u \in U$. Zvolme omezené otevřené okolí $U_0 \subset U$ bodu u takové, že $\bar{U}_0 \subset U$. Protože φ je homeomorfismus, je $\varphi(U_0)$ otevřená v $\varphi(U)$, což je otevřená podmnožina S , tedy $\varphi(U_0)$ je relativně otevřená podmnožina S , a platí tedy $\varphi(U_0) = V \cap S$ pro nějakou $V \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou. Ukážeme, že

$$\bar{S} \cap V = S \cap V,$$

z čehož už plyne, že $\varphi(U_0)$ je relativně otevřená v \bar{S} .

Nechť pro spor existuje $y \in (\bar{S} \setminus S) \cap V$. Pak existuje posloupnost prvků $x_i \in S \cap V$, $x_i \rightarrow y$, přitom nutně $x_i = \varphi(u_i)$ pro nějaké $u_i \in U_0$. Z kompaktnosti \bar{U}_0 existuje podposloupnost $u_{\sigma(i)} \rightarrow u_0 \in \bar{U}_0 \subset U$, tedy ze spojitosti φ

$$x_{\sigma(i)} = \varphi(u_{\sigma(i)}) \rightarrow \varphi(u_0) = y,$$

tedy $y \in \text{im } \varphi \subset S$, což je spor. \square

1.2 Křivky na ploše a tečný prostor

Pod *regulární parametrizovanou křivkou* na množině $M \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme zobrazení $c : I \rightarrow M$ třídy C^1 definované na intervalu I a splňující $c'(t) \neq 0$, $t \in I$.

Tvrzení 1.6 (o křivce na ploše). *Bud'te $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ k -mapa a $c : I \rightarrow \varphi(U)$ regulární parametrizovaná křivka na jednoduché k -ploše $\varphi(U)$. Pak $u := \varphi^{-1} \circ c : I \rightarrow U$ je regulární parametrizovaná křivka v U a platí $c = \varphi \circ u$.*

Důkaz. Zobrazení $u = \varphi^{-1} \circ c$ je zřejmě spojitě na intervalu I . Ukážeme, že u je třídy C^1 . Zvolme $t_0 \in I$ a označme $x_0 := c(t_0)$, $u_0 := \varphi^{-1}(x_0)$ a $\varphi =$

$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Protože $\text{rank } D\varphi(u_0) = k$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že matice $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u_0)\right)_{i,j=1}^k$ je regulární. Označme $\Pi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$ projekci do prvních k souřadnic a $v_0 := \Pi(x_0)$. Zobrazení $g := \Pi \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ je třídy C^1 a $Dg(u_0)$ je regulární, tedy podle věty o inverzním zobrazení existuje inverzní zobrazení g^{-1} definované na nějakém okolí V bodu v_0 , platí přitom $g^{-1} \circ \Pi = \varphi^{-1}$ na $\varphi(U) \cap \Pi^{-1}(V)$. Pro všechna $t \in (\Pi \circ c)^{-1}(v_0)$ je pak

$$u(t) = \varphi^{-1} \circ c(t) = g^{-1} \circ \Pi \circ c(t),$$

tedy u je třídy C^1 na $(\Pi \circ c)^{-1}(v_0)$, což je okolí bodu t_0 . □

Pozn.: Ze vztahu $c = \varphi \circ u$ plyne

$$c'(t) = D\varphi(u(t))(u'(t)) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u(t))u'_i(t), \quad t \in I.$$

Definice 1.4. Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ je *tečným vektorem* k ploše $S \subset \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in S$, jestliže $v = 0$ nebo existuje regulární parametrizovaná křivka $c : I \rightarrow S$ na ploše S a bod $t_0 \in I$ tak, že $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$. Množinu všech tečných vektorů plochy S v bodě $x \in S$ značíme $T_x S$.

Přednáška 28.2.2023

Věta 1.7 (popis tečných vektorů plochy). *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha a $x \in S$, pak $T_x S$ je k -rozměrný lineární podprostor \mathbb{R}^n . Je-li navíc $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow S$ mapa plochy S s vlastností $\varphi(u) = x$ pro nějaký $u \in U$, pak*

$$T_x S = \text{Lin} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u) \right\} \quad (1)$$

a $D\varphi(u)$ zobrazuje bijektivně \mathbb{R}^k na $T_x S$.

Úmluva: Budeme používat symbol $d\varphi(u)$ pro bijekci $\mathbb{R}^k \rightarrow T_x S$.

Důkaz. Stačí ukázat rovnost (1) (protože parciální derivace $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u)$ jsou lineárně nezávislé).

(a) Necht' $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u)$ pro nějaké $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (0, \dots, 0)$. Uvažujme křivku

$$c(t) := \varphi(u_1 + \alpha_1 t, \dots, u_k + \alpha_k t), \quad t \in (-\delta, \delta),$$

kde $\delta > 0$ je tak malé, aby argument ležel v definičním oboru mapy φ . Pak c je zřejmě regulární parametrizovaná křivka na ploše S a platí $c(0) = x$ a $c'(0) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u)$.

(b) Necht' $c : I \rightarrow S$ je regulární parametrizovaná křivka, $c(t_0) = x$. Předpokládejme, že celý obraz křivky c leží v obrazu k -mapy φ . Pak podle předchozího tvrzení $c = \varphi \circ u$ pro regulární parametrizovanou křivku $u = \varphi^{-1} \circ c$, a tedy

$$c'(t_0) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u(t_0)) u'_i(t_0).$$

□

Věta 1.8 (změna parametrů plochy). *Bud' $\varphi : U \rightarrow S$, $\psi : V \rightarrow S$ dvě mapy plochy S takové, že $M := \varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. Pak zobrazení $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(M) \rightarrow \psi^{-1}(M)$ je C^1 difeomorfismus a pro $\varphi(u) = \psi(v) \in M$ platí*

$$D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u) = (d\psi(v))^{-1} \circ d\varphi(u).$$

Důkaz. Bud' $x = \varphi(u) = \psi(v) \in M$ (pro vhodné $u \in U$ a $v \in V$). Označme Π kolmou projekci z \mathbb{R}^n do lineárního podprostoru $T_x S$ a $g := \Pi \circ \varphi$, $h := \Pi \circ \psi$ (tedy $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, $h : V \rightarrow \mathbb{R}^k$). Diferenciály $Dg(u)$ a $Dh(v)$ jsou regulární, tedy g , resp. h , jsou C^1 difeomorfismy na nějakém okolí bodu u , resp. v . Tedy i $h^{-1} \circ g = \psi^{-1} \circ \varphi$ je C^1 difeomorfismus na okolí bodu u . Protože $\varphi = \psi \circ (\psi^{-1} \circ \varphi)$, musí být

$$D\varphi(u) = D\psi(\psi^{-1}(\varphi(u))) \circ D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u),$$

tedy i $d\varphi(u) = d\psi(v) \circ D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u)$, z čehož už plyne

$$(d\psi(v))^{-1} \circ d\varphi(u) = D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u).$$

□

Definice 1.5. Řekneme, že zobrazení $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ definované na k -ploše S třídy C^m je *diferencovatelné* (třídy C^m), jestliže pro každou k -mapu $\varphi : U \rightarrow S$ je $\Phi \circ \varphi$ třídy C^m . Je-li $\varphi : U \rightarrow S$ k -mapa a $x = \varphi(u)$, definujeme *diferenciál* zobrazení Φ v bodě x jako

$$D\Phi(x) := D(\Phi \circ \varphi)(u) \circ (d\varphi(u))^{-1}.$$

Pozn.:

1. $D\Phi(x)$ je lineární zobrazení z $T_x S$ do \mathbb{R}^m .
2. Diferencovatelnost Φ stačí ověřit jen pro mapy z nějakého atlasu plochy S .
3. Pro každou mapu φ plochy S je inverzní zobrazení φ^{-1} třídy C^m na ploše $\text{im } \varphi \subset S$.

Tvrzení 1.9 (korektnost definice diferenciálu na ploše). *Definice diferenciálu zobrazení na ploše je korektní (nezávisí na volbě mapy).*

Důkaz. Buďte $\varphi : U \rightarrow S$ a $\psi : V \rightarrow S$ dvě k -mapy, $x = \varphi(u) = \psi(v)$. Pak $\Phi \circ \varphi = \Phi \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi$ na okolí bodu u , a tedy

$$D(\Phi \circ \varphi)(u) = D(\Phi \circ \psi)(v) \circ D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u) = D(\Phi \circ \psi)(v) \circ (d\psi(v))^{-1} \circ d\varphi(u),$$

což dává

$$D(\Phi \circ \varphi)(u) \circ (d\varphi(u))^{-1} = D(\Phi \circ \psi)(v) \circ (d\psi(v))^{-1}.$$

□

1.3 Míra na ploše, plošný integrál

Motivace: Uvažujme prosté lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($k < n$), označme $M := L(\mathbb{R}^k)$, a uvažujme shodnost $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ takovou, že $R(M) = \mathbb{R}^k \times \{0, \dots, 0\}$. Nechť Π je projekce z \mathbb{R}^n do prvních k souřadnic. Pak $\Pi \circ R \circ L$ je lineární zobrazení z \mathbb{R}^k do \mathbb{R}^k a platí

$$|\det(\Pi R L)| = \sqrt{\det((\Pi R L)^T \Pi R L)} = \sqrt{\det(L^T L)}$$

(protože $\Pi^T \Pi$ i $R^T R$ jsou jednotkové matice). Podle věty o substituci (pro lineární zobrazení) je

$$\lambda^k(\Pi \circ R \circ L(B)) = \sqrt{\det(L^T L)} \lambda^k(B), \quad B \in \mathcal{B}^k$$

(\mathcal{B}^k značí Borelovskou σ -algebru v \mathbb{R}^k). Je přirozené definovat (Lebesgueovu) míru λ_M na podprostoru M tak, aby pro každou borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}^n \cap M := \{B \cap M : B \in \mathcal{B}^n\}$ platilo

$$\lambda_M(B) = \lambda^k(\Pi \circ R(B))$$

(neboť $\Pi \circ R$ zobrazuje M izometricky na \mathbb{R}^k). Pak lze λ_M popsat předpisem

$$\lambda_M(B) := \sqrt{\det(L^T L)} \lambda^k(L^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}^n \cap M.$$

Poznamenejme ještě, že matici zobrazení $\Pi R L$ můžeme chápat jako matici lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^k \rightarrow M$ vzhledem k nějaké ortonormální bázi lineárního prostoru M .

Definice 1.6. Buď $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ k -mapa. Na jednoduché k -ploše $S := \varphi(U)$ definujeme borelovskou míru μ_S předpisem

$$\mu_S(B) := \int_{\varphi^{-1}(B)} J_k \varphi(u) d\lambda^k(u), \quad B \subset S \text{ borelovská,}$$

kde

$$J_k \varphi(u) := \sqrt{\det(D\varphi(u)^T D\varphi(u))}, \quad u \in U.$$

Pozn.:

1. $J_k \varphi(u) > 0$, neboť $D\varphi(u)$ má plnou hodnost (bylo na cvičení).
2. $J_k \varphi(u) = |\det d\varphi(u)|$, pokud lineární zobrazení $d\varphi(u) : \mathbb{R}^k \rightarrow T_{\varphi(u)}S$ reprezentujeme maticí vzhledem k libovolné ortonormální bázi tečného prostoru $T_{\varphi(u)}S$.

Tvrzení 1.10 (korektnost definice míry na ploše). *Definice μ_S je korektní (nezávisí na volbě parametrizace).*

Důkaz. Mějme $\varphi : U \rightarrow S$ a $\psi : V \rightarrow S$ dvě k -mapy parametrizující plochu S . Pak $\psi^{-1} \circ \varphi : U \rightarrow V$ je C^1 -difeomorfismus a podle věty o substituci (z přednášky Teorie míry 1, dokázané v Teorii míry 2) platí (klademe $v = \psi^{-1} \circ \varphi(u)$) a píšeme stručně du, dv místo $d\lambda^k(u), d\lambda^k(v)$)

$$\begin{aligned} \int_{\psi^{-1}(B)} J_k \psi(v) dv &= \int_{\varphi^{-1}(B)} J_k \psi(v) |\det D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u)| du \\ &= \int_{\varphi^{-1}(B)} |\det d\psi(v)| |\det(d\psi(v))^{-1}(d\varphi(u))| du \\ &= \int_{\varphi^{-1}(B)} J_k \varphi(u) du \end{aligned}$$

(použili jsme vzorec z věty o změně parametrů plochy). □

Tvrzení 1.11 (existence spočetného atlasu). *Každá plocha v \mathbb{R}^n má nejvýše spočetný atlas.*

Důkaz. Očíslujme si $\{U_1, U_2, \dots\}$ všechny koule v \mathbb{R}^n s racionálními středy i poloměry. Nechť je dána k -plocha $S \subset \mathbb{R}^n$ a pro každý bod $x \in S$ označme φ_x nějakou k -mapu S splňující $x \in \text{im } \varphi$. Jistě existuje index $i(x)$ takový, že $x \in U_{i(x)} \cap S \subset \text{im } \varphi_x$. Ke každému $j \in J := \{i(x) : x \in S\}$ vyberme libovolnou mapu $\varphi_j := \varphi_x$ pro nějaké x s $i(x) = j$. Pak $\{\varphi_j : j \in J\}$ je atlas S . □

Věta 1.12 (existence a jednoznačnost míry na ploše; definice). *Na každé k -ploše $S \subset \mathbb{R}^n$ existuje právě jedna Borelovská míra μ_S taková, že pro každou k -mapu φ plochy S platí $\mu_S|_{\text{im } \varphi} = \mu_{\text{im } \varphi}$.*

Důkaz. Bud' $\{\varphi_i : i = 1, 2, \dots\}$ nějaký nejvýše spočetný atlas S . Uvažujme rozklad plochy $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots$, kde $S_1 := \text{im } \varphi_1$, $S_2 := \text{im } \varphi_2 \setminus \text{im } \varphi_1$, $S_3 := \text{im } \varphi_3 \setminus (\text{im } \varphi_1 \cup \text{im } \varphi_2)$, \dots . Položme

$$\mu_S(B) := \sum_i \mu_{\text{im } \varphi_i}(B \cap S_i), \quad B \in \mathcal{B}^n \cap S.$$

Je-li ψ libovolná k -mapa plochy S , pak pro libovolnou borelovskou množinu $B \subset \text{im } \psi$ platí

$$\mu_S(B) = \sum_i \mu_S(B \cap S_i) = \sum_i \mu_{\text{im } \varphi_i}(B \cap S_i) = \sum_i \mu_{\text{im } \psi}(B \cap S_i) = \mu_{\text{im } \psi}(B)$$

(ve třetí rovnosti jsme využili nezávislosti míry na parametrizaci jednoduché k -plochy). Jednoznačnost je zřejmá. \square

Definice 1.7 (Plošný integrál prvního druhu). Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha a $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ borelovsky měřitelná funkce, pak definujeme

$$\int_S f \, dS := \int_S f \, d\mu_S,$$

má-li integrál na pravé straně smysl (integrál chápeme jako abstraktní Lebesgueův integrál podle borelovské míry μ_S).

Pozn.: Symbol “ dS ” je tradičně používán pro tento typ plošného integrálu a nevztahuje se ke značení plochy S .

Přednáška 7.3.2023

Věta 1.13 (Izometrie ploch). *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha a $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ shodnost (izometrie), pak $\rho(S)$ je rovněž k -plocha a platí $\mu_{\rho(S)} = \mu_S \rho^{-1}$.*

Důkaz. Je-li $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ k -mapa, pak $\rho \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ je rovněž k -mapa. Navíc platí $D(\rho \circ \varphi)(u) = R \circ D\varphi(u)$, $u \in U$, kde R je lineární složka shodnosti ρ , a tedy

$$J_k(\rho \circ \varphi)(u) = \sqrt{\det(D\varphi(u))^T R^T R(D\varphi(u))} = \sqrt{\det(D\varphi(u))^T (D\varphi(u))} = J_k\varphi(u).$$

Z toho plyne, že pro libovolnou borelovskou množinu $B \subset \text{im}(\rho \circ \varphi)$

$$\mu_{\text{im}(\rho \circ \varphi)}(B) = \mu_{\text{im}\varphi}(\rho^{-1}(B)).$$

K dokončení důkazu si stačí uvědomit, že pro libovolný atlas (φ_i) plochy S je $(\rho \circ \varphi_i)$ atlas plochy $\rho(S)$. \square

Věta 1.14 (Podplochy nižší dimenze mají míru nula). *Bud' $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha a $S' \subset S$ l -plocha, $l < k$. Pak $\mu_S(S') = 0$.*

Důkaz. Použitím spočetných atlasů stačí ukázat větu pro případ jednoduchých ploch: $S = \varphi(U)$, $S' = \psi(V)$, kde $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ je k -mapa a $\psi : V \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ l -mapa. Složené zobrazení $\varphi^{-1} \circ \psi : V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k$ je třídy C^1 , což ukážeme podobně jako pro případ křivky na ploše ($l = 1$), tedy pomocí vhodné projekce plochy na okolí daného bodu do podprostoru dimenze k . Dále $\varphi^{-1} \circ \psi$ je regulární a je to homeomorfismus, tedy je to l -mapa v $U \subset \mathbb{R}^k$. Množina $Q := \varphi^{-1}(S')$ je tedy (jednoduchá) l -plocha v \mathbb{R}^k . Ukážeme, že $\lambda^k(Q) = 0$ (z toho již plyne dokazované tvrzení).

Podle Věty 1.4 ke každému bodu $x \in Q$ existuje okolí O_x takové, že $Q \cap O_x$ lze zapsat jako graf funkce $h : W \rightarrow L^\perp$ definované na otevřené podmnožině W nějakého l -rozměrného podprostoru $L \subset \mathbb{R}^k$. Z Fubiniho věty snadno plyne, že míra grafu funkce je nula, tedy $\lambda^k(Q \cap O_x) = 0$. Z otevřeného pokrytí $Q = \bigcup_{x \in Q} O_x$ lze vybrat spočetné podpokrytí (argument je stejný jako při důkazu existence spočetného atlasu), tedy i $\lambda^k(Q) = 0$. \square

Definice 1.8 (zobecněná plocha). Neprázdná množina $S \subset \mathbb{R}^n$ je *zobecněná k -plocha*, jestliže existuje rozklad

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_p \cup M_1 \cup \dots \cup M_q \quad p \geq 1, q \geq 0,$$

kde S_1, \dots, S_p jsou jednoduché k -plochy a M_j je l_j -plocha dimenze $0 \leq l_j < k$, $j = 1, \dots, q$ ($q \geq 0$), a platí podmínka

$$S_i \cap \left(\bigcup_{i' \neq i} \overline{S_{i'}} \cup \bigcup_{j=1}^q \overline{M_j} \right) = \emptyset.$$

Pozn.:

1. Pod 0-plochou rozumíme množinu izolovaných bodů.
2. Jednoduché k -plochy S_i nazveme *komponentami* S . Body $x \in S_i$ nazveme *regulárními body* plochy.
3. Poslední podmínka říká, že každá komponenta musí mít prázdný průnik s uzávěry všech ostatních komponent, jedná se tedy o zesílenou podmínku disjunktnosti.
4. Standardním příkladem zobecněné $(n - 1)$ -plochy je hranice jednotkové krychle $\partial[0, 1]^n$.

Definice 1.9 (míra na zobecněné ploše). Na zobecněné k -ploše $S = S_1 \cup \dots \cup S_p \cup M_1 \cup \dots \cup M_q$ definujeme míru μ_S předpisem

$$\mu_S := \mu_{S_1} + \dots + \mu_{S_p},$$

a plošný integrál prvního druhu jako integrál podle této míry.

Tvrzení 1.15 (korektnost definice μ_S). *Definice míry μ_S na zobecněné k -ploše S je konzistentní, tedy nezávisí na reprezentaci zobecněné plochy.*

Důkaz. Mějme dvě různé reprezentace zobecněné k -plochy S :

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_p \cup M_1 \cup \dots \cup M_q = S'_1 \cup \dots \cup S'_{p'} \cup M'_1 \cup \dots \cup M'_{q'}.$$

Ukážeme, že

$$\sum_{i=1}^p \mu_{S_i} = \sum_{j=1}^{p'} \mu_{S'_j},$$

což můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p'} \mu_{S_i} |S'_j = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p'} \mu_{S'_j} |S_i$$

(zde využíváme toho, že $\mu_{S_i}(M'_l) = \mu_{S'_j}(M_l) = 0$ pro všechna i, j, l).

Pokud $S_i = \varphi_i(U_i)$ a $S'_j = \varphi'_j(U'_j)$ jsou příslušné parametrizace, platí

$$S_i \cap S'_j = \varphi_i(U_i \cap ((\varphi_i)^{-1} \circ \varphi'_j(U'_j))) = \varphi'_j(U'_j \cap ((\varphi'_j)^{-1} \circ \varphi_i(U_i))).$$

Protože φ_i a φ'_j jsou homeomorfismy, je průnik $S_i \cap S'_j$ relativně otevřená množina jak v S_i , tak v S'_j , je to tedy buď prázdná množina, nebo jednoduchá k -plocha a platí

$$\mu_{S_i} |S'_j = \mu_{S_i \cap S'_j} = \mu_{S'_j} |S_i.$$

□

1.4 Gaussova-Ostrogradského věta

Motivace: Newtonův vzorec říká že pro “rozumné” reálné funkce f jedné proměnné platí

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Uvedeme zde analogii pro funkci více proměnných.

Bud' $O \subset \mathbb{R}^{n-1}$ otevřená omezená množina a g, h dvě reálné funkce třídy C^1 definované na nějakém okolí uzávěru \bar{O} takové, že $g < h$ na O a $g = h$ na hranici ∂O . Položme

$$\Omega := \{(x, t) \in O \times \mathbb{R} : g(x) < t < h(x)\}$$

(oblast mezi grafy, otevřená podmnožina \mathbb{R}^n). Mějme dále nějakou reálnou funkci F třídy C^1 definovanou na nějakém okolí uzávěru $\bar{\Omega}$. Pro každé $x \in O$ platí podle Newtonova vzorce

$$\int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dt = F(x, h(x)) - F(x, g(x)).$$

Zintegrováním obou stran dostaneme

$$\int_O \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dt d\lambda^{n-1}(x) = \int_O F(x, h(x)) - F(x, g(x)) d\lambda^{n-1}(x).$$

Levou stranu můžeme s pomocí Fubiniovy věty zapsat jako $\int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial z_n}(z) d\lambda^n(z)$. Nechť $\nu(z)$ značí jednotkový vektor vnější normály k oblasti Ω v bodě z . Pokud $z = (x, t)$ leží na grafu funkce h , pak

$$\nu(z) = (\|\nabla h(x)\|^2 + 1)^{-1/2} \left(-\frac{\partial h}{\partial z_1}(x), \dots, -\frac{\partial h}{\partial z_{n-1}}(x), 1 \right).$$

Zobrazení $x \mapsto (x, h(x))$ parametrizující graf h má Jakobián $(\|\nabla h(x)\|^2 + 1)^{1/2}$, tedy lze psát

$$\int_O F(x, h(x)) d\lambda^{n-1}(x) = \int_{\text{graf } h} F \nu_n dS$$

s plošným integrálem na pravé straně, kde ν_n je n -tá souřadnice normálového vektoru ν . Analogický vzorec platí i pro graf g a dohromady dostaneme

$$\int_O F(x, h(x)) - F(x, g(x)) d\lambda^{n-1}(x) = \int_{\partial\Omega} F \nu_n dS.$$

Výše uvedenou rovnost tedy můžeme přepsat do tvaru

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial z_n}(z) d\lambda^n(z) = \int_{\partial\Omega} F \nu_n dS.$$

Přednáška 14.3.2023

Poznámka: Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená omezená množina, jejíž hranice $\partial\Omega$ je zobecněná $(n-1)$ -plocha, pak v každém regulárním bodě $x \in \partial\Omega$ existuje jednoznačně určený jednotkový vnější normálový vektor k Ω , který budeme značit symbolem $\nu(x)$. To je snadno vidět, pokud reprezentujeme hranici $\partial\Omega$ na okolí bodu x jako graf C^1 funkce $n-1$ proměnných.

Uvedený motivační příklad je speciálním případem následující věty.

Věta 1.16 (Gauss-Ostrogradsky). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená množina taková, že její hranice $\partial\Omega$ je zobecněná $(n-1)$ -plocha s konečným plošným obsahem. Nechť pro regulární body $x \in \partial\Omega$ $\nu(x)$ značí jednotkový vektor vnější normály k Ω v bodě x . Nechť $F: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^1 (tedy lze rozšířit na nějaké okolí množiny $\bar{\Omega}$ jako funkce třídy C^1). Pak platí*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) d\lambda^n(x) = \int_{\partial\Omega} F \nu_i dS, \quad i = 1, \dots, n.$$

Důsledek 1.17 (věta o divergenci). *Nechť Ω je jako v předchozí větě a $T: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je vektorové pole třídy C^1 . Pak*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} T d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} \langle T, \nu \rangle dS$$

($\operatorname{div} T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_i}{\partial x_i}$ je divergence pole T).

2 Plošný integrál druhého druhu

2.1 Multivektory a diferenciální formy

Mějme vektorový prostor V dimenze n se skalárním součinem (obvykle uvažujeme $V = \mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem). Pod k -lineární formou na V rozumíme funkci

$$f: \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \times} \rightarrow \mathbb{R}$$

lineární v každé proměnné.

Definice 2.1. k -lineární forma $f: V^k \rightarrow \mathbb{R}$ je *antisymetrická*, jestliže

$$f(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = (\operatorname{sgn} \pi) f(v_1, \dots, v_k)$$

pro všechna $v_1, \dots, v_k \in V$ a pro každou permutaci $\pi \in \Sigma(k)$ množiny $\{1, \dots, k\}$; $\operatorname{sgn} \pi$ značí znaménko permutace π . Prostor všech antisymetrických k -forem na V budeme značit symbolem $\Lambda^k(V)$. Pod 0-formou rozumíme reálné číslo, tedy $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$.

Cvičení: Je-li f antisymetrická k -forma a vektory v_1, \dots, v_k lineárně závislé, pak $f(v_1, \dots, v_k) = 0$. (Návod: nejprve ukažte, že $f(v_1, \dots, v_k) = 0$, pokud existují dva různé indexy i, j , pro něž $v_i = v_j$.)

Pozn.: Je-li (b_1, \dots, b_n) báze V , je každá antisymetrická forma $f \in \Lambda^k(V)$ určena hodnotami

$$f(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n.$$

Dále budeme pracovat s $V = \mathbb{R}^n$ a s kanonickou bází (e_1, \dots, e_n) .

Značení: Pro indexovou množinu $I \subset \{1, \dots, n\}$ o k prvcích ($|I| = k$) budeme symbolem $e_I^* \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ značit antisymetrickou k -formu splňující pro $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$

$$e_I^*(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } I = \{i_1, \dots, i_k\}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro $I = \emptyset$ klademe $e_\emptyset^* := 1$.

Tvrzení 2.1 (o bázi $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$). k -vektory e_I^* , $|I| = k$, tvoří bázi vektorového prostoru $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, tedy $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$.

Důkaz. Prvky e_I^* jsou zřejmě lineárně nezávislé (uvažujeme pouze různé množiny k indexů): skutečně, pokud $\sum_{|I|=k} \alpha_I e_I^* = 0$, pak pro každou pevnou $I_0 = \{i_1 < \dots < i_k\}$ je

$$\sum_{|I|=k} \alpha_I e_I^*(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \alpha_{I_0} = 0,$$

tedy $\alpha_I = 0$ pro každé I . Dále každou $f \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ můžeme psát ve tvaru $f = \sum_{|I|=k} \alpha_I e_I^*$ s koeficienty $\alpha_I = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$. \square

Definice 2.2 (vnější algebra, vnější součin). *Vnější algebru* nad \mathbb{R}^n definujeme jako direktní součet

$$\Lambda^*(\mathbb{R}^n) := \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(\mathbb{R}^n).$$

(Direktní součin $V \oplus W$ vektorových prostorů V, W je definován jako

$$V \oplus W := \{v + w : v \in V, w \in W\},$$

a sčítání je zde definováno po složkách, tedy sčítají se pouze prvky z V nebo prvky z W ; platí $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$.)

Zřejmě $\dim \Lambda^*(\mathbb{R}^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Pro indexové množiny $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ definujeme *vnější součin* prvků e_I^* a e_J^* jako

$$e_I^* \wedge e_J^* = \begin{cases} \text{sgn}(I, J) e_{I \cup J}^*, & \text{pokud } I \cap J = \emptyset, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\text{sgn}(I, J)$ značí znaménko permutace, která převádí prvních $|I|$ prvků množiny $I \cup J$ rostoucím způsobem na I a zbývajících $|J|$ prvků rostoucím způsobem na J . Zřejmě $e_I^* \wedge e_J^* \in \Lambda^{|I|+|J|}(\mathbb{R}^n)$. Vnější součin rozšíříme lineárně a distributivně na celou vnější algebru $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 2.2. Operace vnějšího součinu \wedge je asociativní a distributivní vzhledem ke sčítání na $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$.

Důkaz. Plyne přímo z definice. □

Cvičení: Pro obecné prvky $f \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ a $g \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ platí $f \wedge g \in \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$,

$$(f \wedge g)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \Sigma(k,l)} (\text{sgn } \sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}),$$

kde $\Sigma(k, l)$ je množina všech permutací $\sigma \in \Sigma(k+l)$ takových, že $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$ a $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)$.

Značení: Pro jednoprvkové indexové množiny $\{i\}$ budeme psát

$$dx_i := e_i^* := e_{\{i\}}^* \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n).$$

Zřejmě pro množinu $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ pak platí

$$e_I^* = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

a i zde budeme používat značení $dx_I := e_I^*$.

Definice 2.3 (duální prostor). Je-li V vektorový prostor dimenze n nad \mathbb{R} , pak symbolem $V^* := \Lambda^1(V)$ značíme prostor všech lineárních forem na V a nazýváme *duálním prostorem* k V .

Druhý duál (biduál) $V^{**} = (V^*)^*$ obvykle kanonicky ztotožňujeme s prostorem V ($V^{**} = V$) na základě následujícího kanonického izomorfismu:

$$v \in V \mapsto F_v \in V^{**}, \quad F_v : f \mapsto f(v), \quad f \in V^*.$$

Zobrazení $F : v \mapsto F_v$ je zřejmě lineární, prosté a jeho obraz je podprostor dimenze n v V^{**} , přitom $\dim V^{**} = n$, tedy nutně F je na V^{**} .

Přednáška 21.3.2023

Definice 2.4 (multivektory). Pro vektorový prostor V dimenze n definujeme vektorový prostor k -vektorů jako

$$\Lambda_k(V) := \Lambda^k(V^*),$$

a příslušnou vnější algebru jako

$$\Lambda_*(V) := \Lambda^*(V^*) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda_k(V).$$

Pro $k = 1$ ztotožňujeme

$$\Lambda_1(V) = \Lambda^1(V^*) = V^{**} \cong V.$$

V případě $V = \mathbb{R}^n$ má tento prostor bázi $\{e_I = e_I^{**}, |I| = k\}$ (ztotožňujeme V^{**} s V). Prostor $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ můžeme chápat jako duál $(\Lambda_k(\mathbb{R}^n))^*$, položíme-li $e_I^*(e_J) = \delta_{I,J}$.

Pozn.: Na $\Lambda_*(\mathbb{R}^n)$ je definován vnější součin a pro vektory $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ platí $v_1 \wedge \dots \wedge v_n \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$.

Definice 2.5. k -vektor $\alpha \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ je *jednoduchý*, jestliže existují $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\alpha = u_1 \wedge \dots \wedge u_k$.

Cvičení Ukažte, že 2-vektor $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ v \mathbb{R}^4 není jednoduchý.

Definice 2.6 (skalární součin). Pro indexové množiny $I, J, |I| = |J| = k$, definujeme skalární součin jako

$$e_I \cdot e_J := \begin{cases} 1 & \text{pokud } I = J, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

a rozšíříme tuto definici lineárně na $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$. Skalární součin indukuje normu $\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}$.

Cvičení:

1. Pro vektory $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ platí

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_n = \det(u_{i,j})_{i,j=1}^n (e_1 \wedge \dots \wedge e_n).$$

2. Pro $u, v \in \mathbb{R}^n$ je

$$u \wedge v = \sum_{i < j} (u_i v_j - u_j v_i) (e_i \wedge e_j).$$

3. Pro $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ platí

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{\{|I|=k\}} (\det(v_{i,j})_{i=1, j \in I}^k)^k e_I.$$

Definice 2.7. Pro multivektor $\alpha \in \Lambda(\mathbb{R}^n)$ položme

$$L(\alpha) := \{v \in \mathbb{R}^n : v \wedge \alpha = 0\}.$$

Tvrzení 2.3. Pro nenulový k -vektor $\alpha \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ platí:

- (i) $L(\alpha)$ je vektorový prostor dimenze nejvýše k .
- (ii) $\dim L(\alpha) = k$ právě tehdy, když je α jednoduchý.
- (iii) Jestliže $L(\alpha) = L(\beta)$ pro nějaký $\beta \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$, pak $\beta = c\alpha$ pro nějaké $c \neq 0$.

Pozn.: Z výše uvedených vlastností plyne, že normované jednoduché k -vektory reprezentují orientované k -rozměrné podprostory \mathbb{R}^n .

Důkaz. (i). Snadno z definice odvodíme, že $L(\alpha)$ je vektorový prostor. Zvolme $\{v_1, \dots, v_m\}$ ortonormální bázi prostoru $L(\alpha)$ (tedy $m = \dim L(\alpha)$), a doplňme ji na ortonormální bázi celého \mathbb{R}^n : $\{v_1, \dots, v_n\}$. Pomocí této báze můžeme definovat bázi $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ tvořenou k -vektory

$$v_I := v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}, \quad I = \{i_1 < \dots < i_k\} \subset \{1, \dots, n\}.$$

Pomocí této báze vyjádříme

$$\alpha = \sum_{|I|=k} \alpha_I v_I.$$

Pro každý index $i \leq m$ musí být $0 = v_i \wedge \alpha = \sum_{|I|=k} \alpha_I (v_i \wedge v_I)$, a tedy $\alpha_I = 0$ jakmile $i \notin I$. Nutně tedy $\alpha_I \neq 0$ pouze pro indexové množiny obsahující $\{1, \dots, m\}$, tedy $k \geq m$.

(ii). Z výše uvedeného je zřejmé, že pokud $k = m$, pak $\alpha_I \neq 0$ pouze pro $I = \{1, \dots, k\}$, a tedy α je jednoduchý. Obráceně, pokud $0 \neq \alpha = u_1 \wedge \dots \wedge u_k$ je jednoduchý, pak u_i jsou lineárně nezávislé vektory a všechny patří do $L(\alpha)$, a tedy $m \geq k$.

(iii). Výše jsme ukázali, že pro $k = m$ je každý jednoduchý k -vektor β s $L(\beta) = L(\alpha)$ násobkem $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$. \square

Definice 2.8 (diferenciální forma). *Diferenciální formou stupně k* rozumíme hladké (C^∞) zobrazení

$$\omega : \Omega \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$$

definované na otevřené podmnožině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Symbolem $\mathcal{E}^k(\Omega)$ značíme vektorový prostor všech diferenciálních k -forem na Ω .

Pozn.: Každou diferenciální k -formu $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ můžeme psát ve tvaru

$$\omega(x) = \sum_{|I|=k} \omega_I(x) dx_I, \quad x \in \Omega,$$

s hladkými reálnými funkcemi $\omega_I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. (Připomeňme, že $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, pokud $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$.)

Definice 2.9. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $0 \leq k \leq n$. Vnější (de Rhamův) diferenciál je zobrazení

$$d : \mathcal{E}^k(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^{k+1}(\Omega)$$

definované následovně: Pro $k = 0$ a $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ (f je reálná funkce) klademe

$$df(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i, \quad x \in \Omega.$$

Pro $k > 0$ a $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I dx_I$ pak

$$\begin{aligned} d\omega(x) &:= \sum_{|I|=k} (d\omega_I(x) \wedge dx_I) \\ &= \sum_{|I|=k} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}(x) (dx_i \wedge dx_I), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Příklad: Pro 1-formu $\omega(x, y) = (x^2 + y^2) dx - 2xy dy$ dostáváme

$$\begin{aligned} d\omega(x, y) &= 2x(dx \wedge dx) + 2y(dy \wedge dx) - 2y(dx \wedge dy) - 2x(dy \wedge dy) \\ &= -4y(dx \wedge dy). \end{aligned}$$

Věta 2.4 (pravidla pro vnější diferenciál). Pro $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou, $0 \leq k, l \leq n$, $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ a $\tau \in \mathcal{E}^l(\Omega)$ platí:

(i) $d(\omega + \tau) = d\omega + d\tau$, pokud $k = l$.

(ii) $d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau$.

(iii) $d(d\omega) = 0$.

Důkaz. Vlastnost (i) plyne přímo z definice.

(ii) Vzhledem k linearitě vnějšího diferenciálu stačí rovnost dokázat pro případ $\omega = \omega_I dx_I$, $\tau = \tau_J dx_J$. Platí

$$\begin{aligned} d(\omega_I dx_I \wedge \tau_J dx_J) &= d(\omega_I \tau_J (dx_I \wedge dx_J)) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J + \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i} \right) (dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{i=1}^n \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i} (-1)^k dx_I \wedge dx_i \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau. \end{aligned}$$

(iii) Opět stačí uvažovat případ $\omega = \omega_I dx_I$. V případě $k = 0$ je $\omega = f \in C^\infty(\Omega)$, $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ a

$$\begin{aligned} d(df) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0, \end{aligned}$$

neboť parciální derivace druhého řádu funkce f jsou symetrické. Pro $k > 0$ pak máme

$$d(\omega_I dx_I) = d\omega_I \wedge dx_I$$

a podle pravidla (ii)

$$\begin{aligned} d^2(\omega_I dx_I) &= d(d\omega_I \wedge dx_I) \\ &= d^2\omega_I \wedge dx_I - d\omega_I \wedge d(dx_I) = 0. \end{aligned}$$

□

Přednáška 28.3.2023

Definice 2.10. Diferenciální forma $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ ($k \geq 1$) je *exaktní*, pokud $\omega = d\tau$ pro nějakou $\tau \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$. Forma $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ je *uzavřená*, pokud $d\omega = 0$.

Pozn.: Podle posledního tvrzení předchozí věty je každá exaktní forma uzavřená. Pro některé oblasti Ω platí i obrácená implikace, například pro otevřenou kouli (Poincarého lemma).

Definice 2.11 (přenos diferenciální formy). Buďte $U \subset \mathbb{R}^m$ a $V \subset \mathbb{R}^n$ otevřené množiny a $\Phi : U \rightarrow V$ hladké (C^∞) zobrazení. Pro $0 \leq k \leq \min(m, n)$ definujeme zobrazení

$$\Phi^* : \mathcal{E}^k(V) \rightarrow \mathcal{E}^k(U)$$

následovně:

$$\Phi^*(\omega) := \sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \Phi) d\Phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{i_k},$$

pokud $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I dx_I$, $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ a $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)^T$.

Pozn.: Pro $k = 0$ je $\Phi^*f = f \circ \Phi$, pro $k \geq 1$ pak

$$\Phi^*(\omega) = \sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \Phi) \left(\sum_{j_1=1}^m \frac{\partial \Phi_{i_1}}{\partial u_{j_1}} du_{j_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_k=1}^m \frac{\partial \Phi_{i_k}}{\partial u_{j_k}} du_{j_k} \right).$$

Příklad: Pro $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v)$ a $\omega = (x^2 + y^2)dx \wedge dy$ je

$$\begin{aligned} \Phi^*(\omega) &= u^2(d(u \cos v) \wedge d(u \sin v)) \\ &= u^2(\cos v du - u \sin v dv) \wedge (\sin v du + u \cos v dv) \\ &= u^3 du \wedge dv. \end{aligned}$$

Věta 2.5 (Vlastnosti přenosu dif. formy). Nechť $\Phi : U \rightarrow V$ je třídy C^∞ , $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ otevřené množiny, $\omega \in \mathcal{E}^k(V)$, $\tau \in \mathcal{E}^l(V)$. Pak platí:

- (i) $\Phi^*(\omega + \tau) = \Phi^*\omega + \Phi^*\tau$, pokud $k = l$,
- (ii) $\Phi^*(\omega \wedge \tau) = \Phi^*\omega \wedge \Phi^*\tau$,
- (iii) $\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*\omega)$,
- (iv) je-li $\Psi : W \rightarrow U$ třídy C^∞ , $W \subset \mathbb{R}^p$ otevřená, pak $(\Phi \circ \Psi)^*\omega = \Psi^* \circ \Phi^*(\omega)$,
- (v) pro $k = m = n$ a $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ je

$$\Phi^*\omega = J\Phi(f \circ \Phi) du_1 \wedge \cdots \wedge du_n,$$

kde

$$J\Phi = \det \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} \right)_{i,j=1}^n.$$

Důkaz. (i) Plyne přímo z definice.

(ii) Stačí (vzhledem k (i)) dokázat pro případ $\omega = \omega_I dx_I$, $\tau = \tau_J dx_J$. Necht' $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ a $J = \{j_1 < \dots < j_l\}$. Pak

$$\begin{aligned}\Phi^*(\omega \wedge \tau) &= \Phi^*(\omega_I \tau_J dx_I \wedge dx_J) \\ &= (\omega_I \circ \Phi)(\tau_J \circ \Phi) d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_k} \wedge d\Phi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{j_l} \\ &= \Phi^*\omega \wedge \Phi^*\tau.\end{aligned}$$

(iii) Dokazujeme opět pro případ $\omega = \omega_I dx_I$, $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$. Podle definice je

$$\begin{aligned}\Phi^*(d\omega) &= \Phi^*\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \circ \Phi\right) d\Phi_i \wedge d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_k}, \\ d(\Phi^*\omega) &= d((\omega_I \circ \Phi) d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_k}) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\omega_I \circ \Phi)}{\partial u_j} du_j \wedge d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_k}.\end{aligned}$$

Dosažením rovností

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} du_j \quad \text{a} \quad \frac{\partial(\omega_I \circ \Phi)}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \circ \Phi\right) \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}$$

do výše uvedených vztahů dostaneme kýženou rovnost $\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*\omega)$.

(iv) Pokud $\omega = f \in \mathcal{E}^0(V)$, pak

$$(\Phi \circ \Psi)^*\omega = f \circ (\Phi \circ \Psi) = (f \circ \Phi) \circ \Psi = \Psi^*(f \circ \Phi) = \Psi^* \circ \Phi^*(f).$$

Pokud dále $\omega = dx_i \in \mathcal{E}^1(V)$, pak

$$\begin{aligned}(\Phi \circ \Psi)^*\omega &= \sum_{j=1}^p \frac{\partial(\Phi \circ \Psi)_i}{\partial y_j} dy_j = \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_l} \circ \Psi\right) \left(\sum_{j=1}^p \frac{\partial \Psi_l}{\partial y_j} dy_j\right) \\ &= \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_l} \circ \Psi\right) d\Psi_l = \Psi^*\left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_l} du_l\right) = \Psi^*(\Phi^*\omega).\end{aligned}$$

Obecný případ dostaneme pomocí vlastností (i) a (ii).

(v) Pro $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ je skutečně

$$\begin{aligned}\Phi^*\omega &= (f \circ \Phi) d\Phi_1 \wedge \dots \wedge d\Phi_n \\ &= (f \circ \Phi) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_j} du_j\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_n}{\partial u_j} du_j\right) \\ &= (f \circ \Phi) J\Phi du_1 \wedge \dots \wedge du_n.\end{aligned}$$

□

2.2 Orientace plochy, integrace diferenciálních forem

Definice 2.12 (orientace plochy). *Orientací* k -plochy $S \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme spojitě zobrazení

$$\tau : S \rightarrow \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$$

takové, že pro každý bod $x \in S$ je $\tau(x)$ jednoduchý k -vektor s normou $\|\tau(x)\| = 1$ a splňující $\tau(x) \in \Lambda_k(T_x S)$ (tedy $\tau(x)$ reprezentuje tečný prostor $T_x S$, $L(\tau(x)) = T_x S$).

Příklady:

1. Pro 1-plochu S a $x \in S$ je $\tau(x)$ jednotkový vektor tečný k S v x .
2. Pro válcovou plochu $S = \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ můžeme volit třeba

$$\tau(x, y, z) = (y, -x, 0) \wedge (0, 0, 1), \quad (x, y, z) \in S.$$

Definice 2.13 (orientovaný atlas). (a) Jednoduchá k -plocha $S = \varphi(U)$ má orientaci

$$\tau(\varphi(u)) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u) \right\|}, \quad u \in U;$$

tuto orientaci nazveme *orientací indukovanou parametrizací* φ .

- (b) Řekneme, že dvě mapy φ, ψ plochy S jsou *shodně orientované*, jestliže $\tau(\varphi(u)) = \tau(\psi(v))$ kdykoliv $\varphi(u) = \psi(v) \in S$.
- (c) Atlas \mathcal{A} plochy S nazveme *orientovaným atlasem*, jsou-li každé jeho dvě mapy shodně orientované. Orientovaný atlas zřejmě určuje orientaci plochy.

Cvičení: Dvě mapy φ, ψ plochy S jsou shodně orientované právě tehdy, když pro každý bod $\varphi(u) = \psi(v) \in S$ platí

$$J(\psi^{-1} \circ \varphi)(u) = \det D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u) > 0.$$

Cvičení: Popište dvě různé orientace jednotkové sféry S^2 .

Přednáška 4.4.2023

Definice 2.14 (integrace diferenciálních forem, I). 1. Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^n(\Omega)$, pak $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ pro nějakou funkci $f \in C^\infty(\Omega)$ a definujeme

$$\int_{\Omega} \omega := \int_{\Omega} f(x) d\lambda^n(x),$$

má-li integrál na pravé straně smysl.

2. Je-li $S = \varphi(U)$ jednoduchá k -plocha v \mathbb{R}^n určená C^∞ mapou φ , $\Omega \supset S$ otevřená množina a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, definujeme

$$\int_S \omega := \int_U \varphi^* \omega,$$

má-li integrál na pravé straně smysl.

Pozn.:

- (a) Jednoduchá plocha $S = \varphi(U)$ má orientaci danou mapou φ .
- (b) Integrál $\int_S \omega$ vždy existuje a je konečný (tedy *konverguje*) pokud $S \cap \text{spt } \omega$ je kompaktní, kde

$$\text{spt } \omega := \text{cl}_\Omega \{x \in \Omega : \omega(x) \neq 0\}$$

je *nosič* formy ω (cl_Ω zde značí relativní uzávěr v Ω). Skutečně, je-li $S \cap \text{spt } \omega$ kompaktní, pak i $K := \varphi^{-1}(S \cap \text{spt } \omega) \subset U$ je kompaktní (protože φ je homeomorfismus) a $\text{spt}(\varphi^* \omega) \subset K$. k -formu $\varphi^* \omega$ na $U \subset \mathbb{R}^k$ lze psát ve tvaru $\varphi^* \omega = g du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$ pro nějakou hladkou funkci $g \in C^\infty(U)$ a platí

$$\int_U (\varphi^* \omega) = \int_U g d\lambda^k = \int_K g d\lambda^k$$

a poslední integrál konverguje (g je spojitá a K kompaktní).

Tvrzení 2.6 (nezávislost integrálu na mapě). (i) Je-li $g : V \rightarrow U$ C^∞ difeomorfismus dvou otevřených množin $U, V \subset \mathbb{R}^n$ s kladným Jakobianem ($Jg > 0$ na V), pak pro každou n -formu $\omega \in \mathcal{E}^n(U)$ platí $\int_U \omega = \int_V g^* \omega$, pokud jeden z integrálů existuje.

- (ii) Jsou-li $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ dvě shodně orientované k -mapy parametrizující tutéž jednoduchou k -plochu $S = \varphi(U) = \psi(V)$, $\Omega \supset S$ otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, pak platí

$$\int_U \varphi^* \omega = \int_V \psi^* \omega,$$

pokud jeden z integrálů existuje.

Důkaz. (i) Pro n -formu $\omega = f du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$ platí

$$g^*\omega = (Jg)(f \circ g) dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n,$$

a tedy

$$\begin{aligned} \int_U \omega &= \int_U f(u) d\lambda^n(u), \\ \int_V g^*\omega &= \int_V (f \circ g)(v) Jg(v) d\lambda^n(v), \end{aligned}$$

a oba integrály na pravé straně se rovnají podle věty o substituci (připomeňme, že $Jg > 0$).

(ii) Víme, že přechodové zobrazení $g := \varphi^{-1} \circ \psi : V \rightarrow U$ je C^∞ difeomorfismus, který má navíc kladný Jakobián (díky shodné orientaci map). Platí tedy

$$\int_V \psi^*\omega = \int_V (\varphi \circ g)^*\omega = \int_V g^*(\varphi^*\omega) = \int_U \varphi^*\omega.$$

Využili jsme vzorec pro přenos složeným zobrazením a část (i).

□

Přednáška 11.4.2023

Na prostoru $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ je *norma* definovaná takto:

$$\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{|I|=k} \alpha_I^2}, \quad \alpha = \sum_{|I|=k} \alpha_I dx_I.$$

Tvrzení 2.7. *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ jednoduchá orientovaná k -plocha, $\Omega \supset S$ otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, pak*

$$\left| \int_S \omega \right| \leq \int_S \|\omega\| dS,$$

je-li integrál na levé straně definován.

Důkaz. Necht' $S = \varphi(U)$ a $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I dx_I$. Pak

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega &= \sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k} \\ &= \left(\sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \varphi) \det D\varphi_I \right) du_1 \wedge \cdots \wedge du_k, \end{aligned}$$

kde $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ a $\varphi_I = (\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})$. Použitím Cauchy-Schwarzovy nerovnosti pak dostaneme

$$\begin{aligned} \left| \int_S \omega \right| &= \left| \int_U \left(\sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \varphi) \det D\varphi_I \right) d\lambda^k \right| \\ &\leq \int_U \left| \sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \varphi) \det D\varphi_I \right| d\lambda^k \\ &\leq \int_U \sqrt{\sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \varphi)^2} \sqrt{\sum_{|I|=k} (\det D\varphi_I)^2} d\lambda^k \\ &= \int_S \|\omega\| dS, \end{aligned}$$

protože $J_k \varphi = \sqrt{\sum_{|I|=k} (\det D\varphi_I)^2}$. □

Definice 2.15 (rozklad jednotky). *Rozkladem jednotky* na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme soubor funkcí $(h_\alpha)_{\alpha \in I}$ takových, že

1. pro každé $\alpha \in I$, $h_\alpha : \Omega \rightarrow [0, 1]$ je funkce třídy C^∞ s kompaktním nosičem (v Ω) $\text{spt } h_\alpha := \text{cl}_\Omega \{x \in \mathbb{R}^n : h_\alpha(x) > 0\}$;
2. soubor $(\text{spt } h_\alpha)_{\alpha \in I}$ je *lokálně konečný* (tzn.: pro každý bod $x \in \Omega$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že množina $\{\alpha \in I : \text{spt } h_\alpha \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\}$ je konečná;

3. pro každý $x \in \Omega$ je $\sum_{\alpha \in I} h_\alpha(x) = 1$.

Je-li dále $\Omega = \bigcup_{\beta \in J} V_\beta$ otevřené pokrytí Ω , řekneme, že rozklad jednotky $(h_\alpha)_{\alpha \in I}$ je *podřízený* otevřenému pokrytí $\Omega = \bigcup_{\beta \in J} V_\beta$, jestliže ke každému $\alpha \in I$ existuje $\beta \in J$ takové, že $\text{spt } h_\alpha \subset V_\beta$.

Pozn.: Z lokální konečnosti plyne, že rozklad jednotky je vždy nejvýše spočetný a součet $\sum_{\alpha \in I} h_\alpha$ je v každém bodě konečný.

Věta 2.8 (existence rozkladu jednotky). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $\Omega = \bigcup_{\beta \in J} V_\beta$ její otevřené pokrytí. Pak existuje jemu podřízený rozklad jednotky $(h_\alpha)_{\alpha \in I}$ na Ω .*

Důkaz. (1) Ke každému $x \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$ existuje funkce $f_{a,r} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ třídy C^∞ a taková, že $f_{a,r}(x) > 0$ právě tehdy, když $\|x - a\| < r$. Můžeme vzít například funkci

$$f_{a,r}(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{\|x-a\|^2}{\|x-a\|^2 - r^2}\right), & \|x - a\| < r, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(2) Buď $K \subset \Omega$ kompaktní. Ke každému bodu $x \in K$ najdeme poloměr $r(x) > 0$ takový, že $B(x, r(x)) \subset V_\beta$ pro nějaké $\beta \in J$. Otevřené koule $U_{r(x)}(x)$, $x \in K$, pokrývají kompaktní množinu K , existuje tedy konečně mnoho bodů $x_1, \dots, x_k \in K$ tak, že

$$K \subset U_{r(x_1)}(x_1) \cup \dots \cup U_{r(x_k)}(x_k).$$

Funkce $g(y) := \sum_{j=1}^k f_{x_j, r(x_j)}(y)$ je kladná na kompaktní množině K a položíme-li $h_i := f_{x_i, r(x_i)}/g$, pak $\sum_{i=1}^k h_i = 1$ na K . Otevřenou množinu Ω budeme zdola aproximovat kompakty a uvedenou konstrukci budeme iterovat.

(3) Najdeme posloupnost kompaktních množin (K_j) v \mathbb{R}^n takovou, že $K_j \nearrow \Omega$ a $K_j \subset \text{int } K_{j+1}$ pro každé j . Můžeme položit

$$K_j := [-j, j]^n \cap \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq j^{-1}\}, \quad j \geq j_0$$

(za j_0 vezmeme nějaké j_0 , pro něž $K_{j_0} \neq \emptyset$).

(4) Podobně jako v části (2), pro každé $j \geq j_0$ najdeme konečně mnoho bodů $x_1^j, \dots, x_{k_j}^j \in K_j \setminus \text{int } K_{j-1}$ takových, že

$$B(x_i^j, r(x_i^j)) \subset V_\beta \cap (\text{int } K_{j+1} \setminus K_{j-2})$$

pro nějaké $\beta \in J$ a pro každé $j \geq j_0$ a $1 \leq i \leq k_j$, a

$$K_j \setminus \text{int } K_{j-1} \subset \bigcup_{i=1}^{k_j} U_{r(x_i^j)}(x_i^j), \quad j \geq j_0$$

(klademe $K_{j_0-1} = K_{j_0-2} = \emptyset$). Položíme $I := \{(i, j) : 1 \leq i \leq k_j, j \geq j_0\}$ a

$$g_{i,j} := f_{x_i^j, r(x_i^j)}, \quad (i, j) \in I.$$

Jest $0 < \sum_{i,j} g_{i,j} < \infty$ na Ω a

$$h_\alpha := \frac{g_\alpha}{\sum_\alpha g_\alpha}, \quad \alpha = (i, j) \in I,$$

je hledaný rozklad jednotky. \square

Definice 2.16. Bud' $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha s atlasem \mathcal{A} . Řekneme, že (h_α) je *rozklad jednotky pro S podřízený atlasu \mathcal{A}* , je-li (h_α) rozklad jednotky na nějaké otevřené množině $\Omega \supset S$ takový, že pro každé α existuje mapa $\varphi \in \mathcal{A}$ tak, že $S \cap \text{spt } h_\alpha$ je kompaktní podmnožina obrazu $\text{im } \varphi$ mapy φ .

Důsledek 2.9. Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha s atlasem \mathcal{A} , existuje rozklad jednotky (h_α) pro S podřízený \mathcal{A} .

Důkaz. Plocha S je lokálně uzavřená, tedy existuje otevřená množina $V \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $S = \bar{S} \cap V$. Dále ke každé mapě $\varphi \in \mathcal{A}$ existuje otevřená množina $V_\varphi \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $\text{im } \varphi = S \cap V_\varphi$ a můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $V_\varphi \subset V$. Položme $\Omega := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} V_\varphi$. Podle předchozí věty existuje rozklad jednotky (h_α) na Ω podřízený pokrytí $\Omega = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} V_\varphi$. Dále víme, že ke každému α existuje $\varphi \in \mathcal{A}$ tak, že $\text{spt } h_\alpha \subset V_\varphi$, tedy

$$S \cap \text{spt } h_\alpha \subset S \cap V_\varphi = \text{im } \varphi.$$

Dále platí

$$S \cap \text{spt } h_\alpha = \bar{S} \cap V \cap \text{spt } h_\alpha = \bar{S} \cap \text{spt } h_\alpha$$

a $\text{spt } h_\alpha$ je kompaktní, tedy i $S \cap \text{spt } h_\alpha$ je kompaktní. \square

Definice 2.17 (Integrace diferenciálních forem, II). Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je orientovaná k -plocha, $\Omega \supset S$ otevřená množina a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$.

(a) Řekneme, že $\int_S \omega$ *konverguje*, jestliže

$$\int_S \|\omega\| dS < \infty.$$

(b) Pokud $\int_S \omega$ konverguje, definujeme integrál

$$\int_S \omega := \sum_\alpha \int_{\text{im } \varphi_\alpha} (h_\alpha \omega),$$

kde (h_α) je nějaký rozklad jednotky pro S podřízený nějakému orientovanému atlasu \mathcal{A} a pro každé α , φ_α je mapa atlasu \mathcal{A} taková, že $S \cap \text{spt } h_\alpha$ je kompaktní podmnožina $\text{im } \varphi_\alpha$.

Přednáška 18.4.2023

Tvrzení 2.10 (korektnost definice plošného integrálu). *Nechť S, Ω a ω jsou jako v předchozí definici. Pak platí:*

- (i) $\int_{\text{im } \varphi_\alpha} (h_\alpha \omega)$ existuje konečný pro libovolnou funkci h_α z nějakého rozkladu jednotky pro S s příslušnou mapou φ_α .
- (ii) Jestliže $\int_S \omega$ konverguje, pak $\sum_\alpha \int_{\text{im } \varphi_\alpha} (h_\alpha \omega)$ konverguje absolutně pro libovolný rozklad jednotky (h_α) .
- (iii) Jestliže $\int_S \omega$ konverguje, pak $\sum_\alpha \int_{\text{im } \varphi_\alpha} (h_\alpha \omega)$ nezávisí na volbě rozkladu jednotky (h_α) .

Důkaz. (i) Protože $S \cap \text{spt } h_\alpha$ je kompaktní a

$$\text{im } \varphi_\alpha \cap \text{spt}(h_\alpha \omega) = S \cap \text{spt}(h_\alpha \omega) \subset S \cap \text{spt } h_\alpha,$$

je i $S \cap \text{spt}(h_\alpha \omega)$ kompaktní a integrál $\int_{\text{im } \varphi_\alpha} (h_\alpha \omega)$ existuje a je konečný (viz poznámka za definicí integrálu z diferenciálních forem I).

(ii) S využitím Tvrzení 2.7 a nezáporností funkcí h_α dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \left| \int_{\text{im } \varphi_\alpha} (h_\alpha \omega) \right| &\leq \sum_\alpha \int_{\text{im } \varphi_\alpha} \|h_\alpha \omega\| dS = \sum_\alpha \int_{\text{im } \varphi_\alpha} h_\alpha \|\omega\| dS \\ &= \sum_\alpha \int_S h_\alpha \|\omega\| dS = \int_S \left(\sum_\alpha h_\alpha \right) \|\omega\| dS \\ &= \int_S \|\omega\| dS < \infty. \end{aligned}$$

(iii) Buďte $(h_\alpha), (h'_\beta)$ dva rozklady jednotky pro S podřízené atlasům $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$. Ukážeme, že

$$\sum_\alpha \int_{\text{im } \varphi_\alpha} (h_\alpha \omega) = \sum_\beta \int_{\text{im } \varphi'_\beta} (h'_\beta \omega).$$

Zřejmě $(h_\alpha h'_\beta)_{\alpha, \beta}$ je rozklad jednotky podřízený oběma atlasům \mathcal{A} i \mathcal{A}' , $S \cap \text{spt}(h_\alpha h'_\beta) \subset \text{im } \varphi_\alpha \cap \text{im } \varphi'_\beta$ a podle nezávislosti integrálu na mapě pro jednoduchou plochu platí

$$\int_{\text{im } \varphi_\alpha} (h_\alpha h'_\beta \omega) = \int_{\text{im } \varphi'_\beta} (h_\alpha h'_\beta \omega).$$

Sečtením přes všechna α i β dostaneme požadovanou nerovnost (absolutní konvergence z (ii) nám umožňuje prohazovat sumace). \square

Rozklady jednotky se nepoužívají pro praktické výpočty integrálů z diferenciálních forem. K výpočtu slouží následující věta.

Věta 2.11. *Bud' $S \subset \mathbb{R}^n$ orientovaná k -plocha a $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ mapy S s disjunktními obrazy $S_i := \text{im } \varphi_i \subset S$, $i = 1, \dots, p$, a takové, že*

$$S \setminus \bigcup_{i=1}^p S_i \subset \bigcup_{j=1}^q M_j$$

pro nějaké plochy M_1, \dots, M_q dimenze nižší než k . Nechť $\Omega \supset S$ je otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$. Pak $\int_S \omega$ konverguje právě tehdy, když konvergují integrály $\int_{S_i} \omega$, $i = 1, \dots, p$, a platí

$$\int_S \omega = \sum_{i=1}^p \int_{S_i} \omega.$$

Důkaz. Víme, že $\mu_S(M_j) = 0$ pro všechna j , proto platí

$$\int_S \|\omega\| dS = \sum_{i=1}^p \int_{S_i} \|\omega\| dS,$$

z čehož plyne tvrzení o konvergenci. Dále nechť (h_α) je nějaký rozklad jednotky na S podřízený nějakému atlasu S . Podle definice je $\int_S \omega = \sum_\alpha \int_{\text{im } \varphi_\alpha} \varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega)$ (kde φ_α je nějaká mapa atlasu plochy s vlastností $S \cap \text{spt } h_\alpha \subset \text{im } \varphi_\alpha$).

Pro každé α pak platí (značíme U_α definiční obor mapy φ_α)

$$\int_{\text{im } \varphi_\alpha} (h_\alpha \omega) = \int_{U_\alpha} \varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega) = \int_{U_\alpha} f d\lambda^k,$$

kde $f \in C^\infty(U_\alpha)$ splňuje

$$\varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega) = f du_1 \wedge \dots \wedge du_k.$$

Uvažujme rozklad

$$U_\alpha = \bigcup_i (U_\alpha \cap \varphi_\alpha^{-1} S_i) \cup \bigcup_j (U_\alpha \cap \varphi_\alpha^{-1} M_j).$$

Víme, že $\varphi_\alpha^{-1} M_j$ je plocha dimenze menší než k , tedy její k -rozměrná míra je nulová. Platí tedy

$$\int_{\text{im } \varphi_\alpha} (h_\alpha \omega) = \sum_{i=1}^p \int_{U_\alpha \cap \varphi_\alpha^{-1} S_i} f d\lambda^k = \sum_{i=1}^p \int_{U_\alpha \cap \varphi_\alpha^{-1} S_i} \varphi_\alpha^*(h_\alpha \omega)$$

(množiny $\varphi_\alpha^{-1}(S_i)$ jsou otevřené). Dále nechť $U_i \subset \mathbb{R}^k$ je definiční obor mapy φ_i , $i = 1, \dots, p$. $S_i \cap \text{im } \varphi_\alpha$ je buď prázdná množina, nebo jednoduchá k -plocha, a z nezávislosti integrálu na parametrizaci dostaneme

$$\int_{\text{im } \varphi_\alpha} (h_\alpha \omega) = \sum_{i=1}^p \int_{U_i} \varphi_i^*(h_\alpha \omega) = \sum_{i=1}^p \int_{S_i} (h_\alpha \omega).$$

Sečtením přes všechna α dostaneme kýženou rovnost. □

2.3 Plochy s krajem a Stokesova věta

Definice 2.18 (plocha s krajem). Řekneme, že neprázdná množina $S \subset \mathbb{R}^n$ je k -plocha s krajem (třídy C^∞), jestliže ke každému bodu $x \in S$ existuje k -mapa $\varphi : U_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n$ (třídy C^∞), uzavřený poloprostor $H_\varphi \subset \mathbb{R}^k$ a otevřená množina $V_\varphi \ni x$ takové, že

$$\varphi(H_\varphi \cap U_\varphi) = S \cap V_\varphi.$$

Soubor \mathcal{A} takovýchto k -map, jejichž obrazy pokrývají S , nazveme atlasem S . Množinu

$$\partial S := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \varphi(\partial H_\varphi \cap U_\varphi)$$

nazveme *krajem* plochy S a množinu

$$\text{int } S := S \setminus \partial S$$

vnitřkem S .

Pozn.:

1. Uzavřeným poloprostorem \mathbb{R}^k rozumíme libovolnou množinu

$$\{x \in \mathbb{R}^k : \langle x, a \rangle \leq t\}, \quad 0 \neq a \in \mathbb{R}^k, t \in \mathbb{R}.$$

2. Definice kraje a vnitřku plochy nezávisí na volbě atlasu (viz lemma níže).
3. Upozornění: ∂S zde neznačí hranici plochy v metrice \mathbb{R}^n .
4. Pro každou mapu φ plochy s krajem S jsou $\varphi(\text{int } H_\varphi \cap U_\varphi)$ a $\varphi(U_\varphi \setminus H_\varphi)$ dvě disjunktní k -plochy, pokud jsou to neprázdné množiny.
5. Plocha s krajem nemusí být uzavřená množina. I plocha samotná (bez kraje) splňuje definici plochy s krajem. Jako příklady 2-ploch s krajem můžeme vzít vnitřek čtverce a přidat k němu vnitřky některých (nebo všech) jeho hran.

Lemma 2.12 (nezávislost kraje plochy na mapě). *Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je plocha s krajem a $\varphi : U_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : V_\psi \rightarrow \mathbb{R}^n$ její dvě mapy s příslušnými poloprostory H_φ, K_ψ . Pak pro všechny body $x \in \varphi(U_\varphi \cap H_\varphi) \cap \psi(V_\psi \cap K_\psi)$ platí:*

$$x \in \varphi(\partial H_\varphi) \iff x \in \psi(\partial K_\psi).$$

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že existuje bod $x = \varphi(u) = \psi(v)$ takový, že $u \in U_\varphi \cap \text{int } H_\varphi$ a $v \in V_\psi \cap \partial K_\psi$. Zvolme $\varepsilon > 0$ takové, aby $U_\varepsilon(u) \subset \text{int } H_\varphi$. Přejechodové zobrazení $\psi^{-1} \circ \varphi$ je difeomorfismus, a tedy množina $W := \psi^{-1} \circ \varphi(U_\varepsilon(u))$ musí být otevřená. Ale bod v je podle předpokladu bodem hranice W , což je spor. \square

Tvrzení 2.13 (kraj k -plochy je $(k-1)$ -plocha). *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha s krajem, pak její kraj ∂S je prázdná množina nebo $(k-1)$ -plocha, a vnitřek $\text{int } S$ je k -plocha.*

Důkaz. Necht' \mathcal{A} je atlas S a pro $\varphi \in \mathcal{A}$ necht' U_φ je definiční obor φ a H_φ příslušný uzavřený poloprostor. Uvažujme restrikce

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} &:= \varphi|_{(U_\varphi \cap \text{int } H_\varphi)}, \\ \bar{\varphi} &:= \varphi|_{(U_\varphi \cap \partial H_\varphi)}.\end{aligned}$$

Zřejmě $\tilde{\varphi}$ je k -mapa a $\{\tilde{\varphi} : \varphi \in \mathcal{A}\}$ je atlas $\text{int } S$, tedy $\text{int } S$ je k -plocha. Dále si stačí uvědomit, že složíme-li $\bar{\varphi}$ s lineárním izomorfismem L zobrazujícím \mathbb{R}^{k-1} na ∂H_φ , dostaneme $(k-1)$ -mapu: skutečně, $L^{-1}(U_\varphi \cap \partial H_\varphi)$ je otevřená podmnožina \mathbb{R}^{k-1} , $L \circ \bar{\varphi}$ je třídy C^∞ a jeho diferenciál má plnou hodnost (jinak by ani diferenciál φ v odpovídajícím bodě neměl plnou hodnost). Konečně zobrazení $\bar{\varphi}$, a tedy i $L \circ \bar{\varphi}$ je homeomorfismus ($\bar{\varphi}$ i $\bar{\varphi}^{-1}$ jsou restrikce spojitých zobrazení, tedy spojitá zobrazení). \square

Přednáška 25.4.2023

Připomeňme si, že je-li $\varphi : U_\varphi \rightarrow S$ mapa a $u \in U_\varphi$, $x = \varphi(u)$, pak

$$d\varphi(u) : \mathbb{R}^k \rightarrow T_x S$$

je lineární izomorfismus. Je-li S plocha s krajem, je tečný prostor $T_x S$ definován i v bodech kraje $x \in \partial S$. Tečný prostor ∂S je pak $(k-1)$ -rozměrný lineární podprostor prostoru $T_x S$:

$$T_x(\partial S) \subset T_x S$$

a obrazem $d\varphi(u)(H_\varphi)$ je poloprostor v tečném prostoru $T_x S$.

Definice 2.19 (vnější normálový vektor). Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha s krajem a $x \in \partial S$ bod kraje, pak *jednotkový vnější normálový vektor* S v bodě x je jednotkový vektor $\nu_S(x) \in T_x S$ kolmý k $T_x(\partial S)$ a směřující “ven” z S . Je-li $\varphi : U_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^n$ mapa S s příslušným poloprostorem

$$H_\varphi = \{v \in \mathbb{R}^k : \langle v, b \rangle \leq \alpha\},$$

a taková, že $x = \varphi(u)$ pro nějaký $u \in U_\varphi \cap \partial H_\varphi$, pak

$$\nu_S(x) = \frac{D\varphi(u)(D\varphi(u)^T D\varphi(u))^{-1}b}{\|D\varphi(u)(D\varphi(u)^T D\varphi(u))^{-1}b\|},$$

viz cvičení níže.

Cvičení: Pro prosté lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ (reprezentované maticí značenou rovněž A) platí:

1. $\langle u, v \rangle = \langle A(A^T A)^{-1}u, Av \rangle$, $u, v \in \mathbb{R}^k$;
2. Je-li $H = \{v \in \mathbb{R}^k : \langle u, v \rangle \leq 0\}$ poloprostor, pak $A(H) \subset L := A(\mathbb{R}^k)$ je rovněž poloprostor

$$A(H) = \{w \in L : \langle A(A^T A)^{-1}u, w \rangle \leq 0\}.$$

Definice 2.20 (Hodgeho dualita). Je-li V vektorový prostor dimenze n se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a s ortonormální bází (e_1, \dots, e_n) (určující orientaci V), pak lineární operátor $\star : V \rightarrow \Lambda_{n-1}(V)$ je definován předpisem

$$v \mapsto \star v, \quad u \wedge (\star v) = \langle u, v \rangle e_1 \wedge \dots \wedge e_n, \quad u \in V.$$

Cvičení: Ukažte, že operátor \star je korektně definován. Dále ověřte, že v případě $V = \mathbb{R}^n$

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = \star v \iff v = v_1 \times \dots \times v_{n-1},$$

tedy že \star je v jistém smyslu duální operátor k vektorovému součinu.

Pozn.: Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha s krajem, pak $\text{int } S := S \setminus \partial S$ (vnitřek plochy S) je k -plocha. Je-li dále τ orientace plochy $\text{int } S$, lze tuto orientaci vždy jednoznačně rozšířit i do bodů kraje S . Zároveň máme v krajních bodech plochy definován i k -rozměrný tečný prostor $T_x S$.

Definice 2.21 (orientace plochy s krajem). Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ orientovaná k -plocha s krajem s orientací $x \mapsto \tau_S(x)$, $x \in S$, pak indukovaná orientaci kraje ∂S je definovaná jako

$$\tau_{\partial S}(x) := \star_T \nu_S(x), \quad x \in \partial S,$$

kde $T = T_x S$ je tečný prostor plochy S v bodě x orientovaný ve shodě s orientací S a \star_T značí Hodgeho dualitu v prostoru T .

Pozn.: Pro $\tau_{\partial S}(x) = u_1 \wedge \cdots \wedge u_{k-1}$ musí vždy být

$$(\nu_S(x), u_1, \dots, u_{n-1})$$

kladně orientovaná báze tečného prostoru $T_x S$.

Věta 2.14 (Stokesova věta pro poloprostor). *Bud' $H \subset \mathbb{R}^n$ uzavřený poloprostor s orientací $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ a $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ forma s kompaktním nosičem. Pak*

$$\int_{\text{int } H} d\omega = \int_{\partial H} \omega.$$

Důkaz. Forma ω je tvaru

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \omega_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

a tedy

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

(a). Předpokládejme nejprve, že $H = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n \leq 0\}$. Pro všechna $i < n$ je pak $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_i = 0$ (podle Newtonova vzorce, protože všechny parciální derivace mají kompaktní nosič). Platí tedy

$$\int_{\text{int } H} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = 0,$$

a dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\text{int } H} d\omega &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Funkce

$$\varphi : (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

parametrizuje hranici ∂H . Tato mapa indukuje orientaci $e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1}$ na ∂H_n a protože $\nu_H = e_n$, je

$$\nu_H \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1} = (-1)^{n-1} e_1 \wedge \dots \wedge e_n,$$

tedy φ indukuje správnou orientaci v případě n lichého a opačnou v případě n sudého. Pak platí

$$\begin{aligned} \int_{\partial H} \omega &= (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi^* \omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

(b) Je-li H obecný poloprostor, existuje shodnost $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ taková, že $\rho(\{x_n \leq 0\}) = H$. Forma $\rho^* \omega$ má také kompaktní nosič a podle části (a) platí

$$\int_{\rho^{-1}(\text{int } H)} \rho^*(d\omega) = \int_{\{x_n < 0\}} d(\rho^* \omega) = \int_{\{x_n = 0\}} \rho^* \omega = \int_{\rho^{-1}(\partial H)} \rho^* \omega.$$

Z toho už plyne $\int_{\text{int } H} d\omega = \int_{\partial H} \omega$ podle následujícího lemmatu. \square

Lemma 2.15. *Je-li $\rho : U \rightarrow V$ C^∞ difeomorfismus otevřených podmnožin \mathbb{R}^n , $\omega \in \mathcal{E}^k(V)$ a $S \subset V$ orientovaná k -plocha s atlasem \mathcal{A} , pak $\rho^{-1}(S)$ je orientovaná k -plocha s atlasem $\{\rho^{-1} \circ \varphi : \varphi \in \mathcal{A}\}$ a platí*

$$\int_{\rho^{-1}(S)} \rho^* \omega = \int_S \omega,$$

má-li jeden z integrálů smysl.

Důkaz. Tvrzení stačí dokázat pro jednoduchou k -plochu $S = \varphi(U)$. Podle definice platí

$$\begin{aligned} \int_{\rho^{-1}(S)} \rho^* \omega &= \int_U (\rho^{-1} \circ \varphi)^*(\rho^* \omega) = \int_U (\varphi^* \circ (\rho^{-1})^* \circ \rho^*) \omega \\ &= \int_U \varphi^* \omega = \int_S \omega. \end{aligned}$$

\square

Věta 2.16 (Stokesova věta). *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ orientovaná k -plocha s krajem, $\Omega \supset S$ otevřená množina a $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ taková, že $S \cap \text{spt } \omega$ je kompaktní, pak*

$$\int_{\text{int } S} d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že norma $\|\omega\|$ i $\|d\omega\|$ nabývá svého maxima na kompaktu $S \cap \text{spt } \omega$, tedy oba integrály $\int_{\text{int } S} d\omega$ a $\int_{\partial S} \omega$ konvergují.

Nechť dále (h_α) je rozklad jednotky pro S podřízený nějakému (orientovanému) atlasu \mathcal{A} . (Rozklad jednotky pro plochu s krajem je definován stejně jako pro plochu bez kraje.) Mapu příslušnou funkci h_α značíme φ_α a příslušný poloprostor H_α . Pro každé α pak podle předchozí věty platí

$$\int_{\text{int } H_\alpha} d(\varphi_\alpha^*(h_\alpha\omega)) = \int_{\partial H_\alpha} \varphi_\alpha^*(h_\alpha\omega).$$

Nosiče forem $d(\varphi_\alpha^*(h_\alpha\omega))$ i $\varphi_\alpha^*(h_\alpha\omega)$ jsou obsaženy v U_α , proto můžeme psát

$$\int_{U_\alpha \cap \text{int } H_\alpha} d(\varphi_\alpha^*(h_\alpha\omega)) = \int_{U_\alpha \cap \partial H_\alpha} \varphi_\alpha^*(h_\alpha\omega).$$

Podle definice integrálu na jednoduché ploše je tedy

$$\int_{\text{int } S} d(h_\alpha\omega) = \int_{\partial S} (h_\alpha\omega).$$

Z lokální konečnosti rozkladu jednotky plyne (viz cvičení za větou), že jen konečně mnoho nosičů h_α zasahuje kompaktní množinu $S \cap \text{spt } \omega$, a sečtením přes tato α a využitím vztahu $\sum_\alpha h_\alpha = 1$ dostaneme

$$\int_{\text{int } S} d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

□

Cvičení: Je-li (h_α) rozklad jednotky a K kompaktní, pak $\{\alpha : \text{spt } h_\alpha \cap K \neq \emptyset\}$ je konečná.

Důsledek 2.17 (Věta o divergenci). *Bud' $S \subset \mathbb{R}^n$ n -plocha s krajem, $\Omega \supset S$ otevřená a $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorové pole třídy C^∞ takové, že $S \cap \text{spt } F$ je kompaktní. Pak*

$$\int_{\text{int } S} \text{div } F d\lambda^n = \int_{\partial S} \langle F, \nu_S \rangle dS$$

($\nu_S(x)$ je vnější jednotkový normálový vektor k S v bodě $x \in \partial S$).

Důkaz. Použijeme Stokesovu větu pro $(n-1)$ -formu

$$\omega := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \in \mathcal{E}^{n-1}(\Omega).$$

Platí $d\omega = \text{div } F dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, a podle Stokesovy věty tedy platí

$$\int_{\text{int } S} \text{div } F d\lambda^n = \int_{\partial S} \omega.$$

Zbývá ukázat, že

$$\int_{\partial S} \omega = \int_{\partial S} \langle F, \nu_S \rangle dS.$$

Výpočet je ponechán na cvičení. □

Definice 2.22. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je *těleso se skoro hladkou hranicí*, jestliže $M = \overline{\text{int } M}$ a hranice ∂M je zobecněná $(n - 1)$ -plocha (viz Definice 1.8). Označme $\partial_* M$ množinu všech *regulárních* bodů hranice ∂M . Je-li $\Omega \supset \partial M$ otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\Omega)$, definujeme

$$\int_{\partial M} \omega := \int_{\partial_* M} \omega,$$

má-li integrál na pravé straně smysl.

Pozn.: Není těžké ukázat, že $\text{int } M \cup \partial_* M$ je n -plocha s krajem, a tedy $\partial_* M$ je $(n - 1)$ -plocha orientovaná vnějším normálovým vektorem $\nu_M(x)$, $x \in \partial_* M$.

Věta 2.18 (Zobecněná Stokesova věta I). *Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ těleso se skoro hladkou hranicí, $\Omega \supset M$ otevřená množina a $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(\Omega)$ taková, že $M \cap \text{spt } \omega$ je kompaktní, pak*

$$\int_{\text{int } M} d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Přednáška 2.5.2023

V případě dimenze $n = 2$ je věta o divergenci častěji formulována jako Greenova věta s křivkovým integrálem. Řekneme, že křivka $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ je *po částech hladká*, jestliže existují body $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ takové, že c je hladká funkce na každém intervalu $[t_{i-1}, t_i]$ s nenulovou derivací. Není těžké nahlédnout, že pro jednoduchou, uzavřenou a po částech hladkou křivku c obíhající omezenou oblast U , je uzávěr \bar{U} kompaktní těleso se skoro hladkou hranicí.

Důsledek 2.19 (Greenova věta). *Je-li $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jednoduchá, uzavřená a po částech hladká křivka obíhající omezenou oblast U v kladném smyslu, $\Omega \supset \bar{U}$ otevřená a $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektorové pole třídy C^∞ , pak*

$$\int_U \text{rot } F \, d\lambda^2 = \int_\gamma (F_1 dx + F_2 dy),$$

kde

$$\text{rot } F := \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

je rotace pole F a na pravé straně je křivkový integrál druhého druhu.

Důkaz je ponechán na cvičení (použijte zobecněnou Stokesovu větu, resp. větu o divergenci pro vektorové pole $G = (F_2, -F_1)$).

Dále řekneme, že množina $S \subset \mathbb{R}^n$ je *k -plocha se skoro hladkým krajem*, jestliže $S = \varphi(M)$ pro nějakou k -mapu $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ a těleso se skoro hladkou hranicí $M \subset U \subset \mathbb{R}^k$. Definujeme $\text{int } S := \varphi(\text{int } M)$ vnitřek S a $\partial S := \varphi(\partial M)$ kraj S , a klademe ($\Omega \supset S$ otevřená)

$$\begin{aligned} \int_{\text{int } S} \omega &:= \int_{\text{int } M} \varphi^* \omega, & \omega \in \mathcal{E}^k(\Omega), \\ \int_{\partial S} \omega &:= \int_{\partial M} \varphi^* \omega, & \omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega). \end{aligned}$$

Věta 2.20 (zobecněná Stokesova věta, II). *Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k -plocha se skoro hladkým krajem, $\Omega \supset S$ otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ taková, že $S \cap \text{spt } \omega$ je kompaktní. Pak platí*

$$\int_{\text{int } S} d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

Věta plyne z předchozí (zobecněné Stokesovy) věty:

$$\int_{\text{int } S} d\omega = \int_{\text{int } M} \varphi^*(d\omega) = \int_{\text{int } M} d(\varphi^*\omega) = \int_{\partial M} \varphi^*\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

3 Základy diferenciální geometrie ploch v \mathbb{R}^3

3.1 Normála, první a druhá fundamentální forma plochy

Ve zbytku přednášky se budeme zabývat 2-plochami v \mathbb{R}^3 třídy C^∞ , budeme o nich hovořit stručně jako o plochách. *Orientace* plochy S je dána spojitým zob-

razením $x \mapsto N(x)$, které bodu plochy přiřazuje jednotkový normálový vektor. Toto zobrazení

$$N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

se nazývá *Gaussovo zobrazení*. Je-li $\varphi : U \rightarrow S$ mapa S (respektující orientaci S), pak

$$N(\varphi(u)) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \right\|}.$$

Připomeňme si definici diferenciálu zobrazení na ploše.

Lemma 3.1. *Gaussovo zobrazení je diferencovatelné a platí*

$$DN(x)(T_x S) \subset T_x S.$$

Důkaz. Je-li $\varphi : U \rightarrow S$ mapa a $x = \varphi(u)$, pak složené zobrazení $n := N \circ \varphi$ je diferencovatelné, tedy i N je diferencovatelné v x podle definice. Derivováním rovnosti $\langle n(u), n(u) \rangle = 1$ dostaneme $\langle Dn(u)(\xi), n(u) \rangle = 0$ pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^2$, tedy $Dn(u)(\mathbb{R}^2) \subseteq T_x S$. Tvrzení pak plyne z toho, že $DN(x)(T_x S) = Dn(u)(\mathbb{R}^2)$ (podle definice diferenciálu na ploše). \square

Definice 3.1. Buď S orientovaná plocha a $x \in S$.

1. Lineární zobrazení $L_x = -DN(x) : T_x S \rightarrow T_x S$ se nazývá *Weingartenovo zobrazení*.
2. Bilineární formy na $T_x S$

$$\begin{aligned} I_x(X, Y) &:= \langle X, Y \rangle, \\ II_x(X, Y) &:= \langle L_x X, Y \rangle, \quad X, Y \in T_x S, \end{aligned}$$

se nazývají *první* a *druhá fundamentální forma* plochy S v bodě x . Je-li $\varphi : U \rightarrow S$ mapa taková, že $x = \varphi(u)$ pro $u \in U$, a označíme-li $n = N \circ \varphi$, pak vzory $I_x(\cdot, \cdot)$ a $II_x(\cdot, \cdot)$ při $d\varphi_u$ značíme

$$\begin{aligned} g_u(\xi, \zeta) &= I_u(d\varphi(u)(\xi), d\varphi(u)(\zeta)) = \langle D\varphi(u)(\xi), D\varphi(u)(\zeta) \rangle, \\ h_u(\xi, \zeta) &= II_u(d\varphi(u)(\xi), d\varphi(u)(\zeta)) = -\langle Dn(u)(\xi), D\varphi(u)(\zeta) \rangle, \end{aligned}$$

což jsou bilineární formy na \mathbb{R}^2 s maticemi

$$g_u = \left(\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(u) \right\rangle \right)_{i,j=1}^2, \quad h_u = \left(- \left\langle \frac{\partial n}{\partial u_i}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(u) \right\rangle \right)_{i,j=1}^2.$$

Pozn.: I_x i g_u jsou zřejmě symetrické pozitivně definitní bilineární formy (jdná se o restrikcí skalárního součinu).

Věta 3.2. h_u , a tedy i II_x , je symetrická bilineární forma.

Důkaz. Z rovnosti $\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u), n(u) \rangle = 0$ dostaneme derivováním

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}(u), n(u) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial n}{\partial u_j}(u) \right\rangle = 0,$$

z čehož plyne

$$h_u(e_i, e_j) = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}(u), n(u) \right\rangle,$$

což je výraz symetrický v i, j . □

Pozn.: Z důkazu poslední věty je vidět, že matici druhé fundamentální formy lze vyjádřit ve tvaru

$$h_u = \left(\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}(u), n(u) \right\rangle \right)_{i,j=1}^2.$$

Cvičení: Je-li $S \subset \mathbb{R}^3$ orientovaná plocha s atlasem \mathcal{A} a $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ shodnost, tedy afinní zobrazení $\rho: x \mapsto b + Rx$ s unitární maticí R , pak $\bar{S} := \rho(S)$ je orientovaná plocha s atlasem $\bar{\mathcal{A}} := \{\rho \circ \varphi: \varphi \in \mathcal{A}\}$ a její normála \bar{N} a první a druhá fundamentální forma \bar{g}, \bar{h} splňují:

$$\bar{N}(\rho(x)) = \sigma RN(x), \quad \bar{g}_u = g_u, \quad \bar{h}_u = \sigma h_u, \quad (2)$$

kde $\sigma = \det R \in \{-1, 1\}$.

3.2 Hlavní směry a hlavní křivosti plochy

Připomeňme nejprve Frenetovy rovnice křivky $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, které určují derivace vektorů tečny (\mathbf{t}), hlavní normály (\mathbf{n}) a binormály (\mathbf{b}) křivky v případě nenulové křivosti κ :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \|c'\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Mezi křivostmi křivky na ploše a druhou fundamentální formou plochy ve směru tečny křivky platí následující důležitý vztah.

Věta 3.3. *Bud' S orientovaná plocha a $c: I \rightarrow S$ křivka na ploše S parametrizovaná obloukem. Symboly $\mathbf{t}(s), \kappa(s)$ značíme vektor tečny a křivost křivky, $\mathbf{n}(s)$ je vektor hlavní normály v případě $\kappa(s) \neq 0$ v bodě $s \in I$. Pak platí*

$$II_{c(s)}(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)) = \kappa(s) \langle N(c(s)), \mathbf{n}(s) \rangle, \quad s \in I.$$

Pozn.: Je-li $\kappa(s) = 0$, výraz na pravé straně je roven nule a nevádí tedy, že vektor hlavní normály křivky není definován.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že existuje mapa $\varphi : U \rightarrow S$ plochy taková, že $c(I) \subset \varphi(U)$. Pak $u := \varphi^{-1} \circ c : I \rightarrow U$ je regulární parametrizovaná křivka taková, že $c = \varphi \circ u$ na I . Pro každé $s \in I$ platí

$$\begin{aligned}
 II_{c(s)}(c'(s), c'(s)) &= h_{u(s)}(u'(s), u'(s)) \\
 &= -\langle Dn(u(s))(u'(s)), D\varphi(u(s))(u'(s)) \rangle \\
 &= -\langle (n \circ u)'(s), c'(s) \rangle \\
 &= \langle (n \circ u)(s), c''(s) \rangle \\
 &= \kappa(s) \langle N(c(s)), \mathbf{n}(s) \rangle,
 \end{aligned}$$

přítom čtvrtou rovnost dostaneme derivováním rovnosti $\langle (n \circ u), c' \rangle = 0$, a poslední rovnost plyne z Frenetových vzorců. \square

Přednáška 9.5.2023

Důsledkem je vztah známý jako Meusnierova věta:

Věta 3.4 (Meusnier). *Nechť S a c jsou jako v předchozí větě a označme $\theta(s) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ úhel mezi normálou $N(c(s))$ k ploše a oskulační rovinou křivky c v bodě s . Pak*

$$|II_{c(s)}(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s))| = \kappa(s) \cos \theta(s), \quad s \in I.$$

Definice 3.2. S buď orientovaná plocha, $x \in S$, $0 \neq X \in T_x S$. Pak číslo

$$\kappa_n(X) = \frac{II_x(X, X)}{I_x(X, X)}$$

nazveme *normálovou křivostí* plochy v bodě x a ve směru X .

Pozn.:

1. Zřejmě platí $\kappa_n(\alpha X) = \kappa_n(X)$ pro každé $\alpha \neq 0$, κ_n je tedy skutečně funkcí 'směru' $\langle X \rangle = \{\alpha X : \alpha \in \mathbb{R}\}$.
2. Z Meusnierovy věty plyne, že $|\kappa_n(X)|$ je křivost křivky ležící v řezu plochy rovinou $x + \langle X, N(x) \rangle$ v bodě x .

Zvolme $x \in S$ pevně a označme

$$T_x^1 S = \{X \in T_x S : \|X\| = 1\}.$$

Funkci κ_n můžeme přirozeně chápat jako funkci na $T_x^1 S$; jako spojitá funkce na kompaktu zde musí nabývat minima a maxima.

Definice 3.3. $X \in T_x^1 S$ (resp. αX pro $\alpha \neq 0$) je *hlavním směrem* plochy S v bodě x , jestliže κ_n nabývá extrému v X . Hodnota $\kappa_n(X)$ se pak nazývá *hlavní křivostí* plochy v bodě x .

Pozn.: X je hlavní směr, právě když $-X$ je hlavní směr.

Hledání hlavních směrů a hlavních křivostí: Jedná se o úlohu na vázaný extrém

$$\min / \max \{II_x(X, X) : I_x(X, X) = 1\}.$$

Je-li $\varphi : U \rightarrow S$ mapa plochy s $\varphi(u) = x$, pak lze ekvivalentně úlohu převést na hledání extrému ($\xi \in \mathbb{R}^2$)

$$\min / \max \{h_u(\xi, \xi) : g_u(\xi, \xi) = 1\}.$$

Metodou Lagrangeových multiplikátorů se úloha převede na hledání stacionárních bodů funkce

$$\Lambda(\xi, \lambda) = h_u(\xi, \xi) - \lambda(g_u(\xi, \xi) - 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Funkce Λ je diferencovatelná a ve stacionárních bodech (bodech s nulovým diferenciálem) musí platit

$$d\Lambda_{(\xi, \lambda)}(\eta, 0) = 2h_u(\xi, \eta) - 2\lambda g_u(\xi, \eta) = 0 \quad \text{pro všechna } \eta \in \mathbb{R}^2,$$

v maticovém zápisu

$$\eta^T (h_u - \lambda g_u) \xi = 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^2.$$

Poslední podmínka nastane, právě když

$$(h_u - \lambda g_u) \xi = 0, \tag{3}$$

což může nastat jedině když

$$\det(h_u - \lambda g_u) = 0. \tag{4}$$

Všimněme si, že vektor ξ z (3) je hlavním směrem (resp. jeho obraz $D\varphi(u)\xi$), a hodnota λ z (3) nebo (4) je hlavní křivostí.

Věta 3.5. *Jsou-li $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dvě řešení (4) a ξ_1, ξ_2 odpovídající řešení (3), platí $g_u(\xi_1, \xi_2) = 0$ (neboli hlavní směry odpovídající různým hlavním křivostem jsou vzájemně kolmé). Hlavní směry $X_i = D\varphi(u)\xi_i$ jsou vlastními vektory Weingartenova zobrazení L_x s vlastními čísly λ_i :*

$$L_x(X_i) = \lambda_i X_i, \quad i = 1, 2.$$

Hodnoty λ_i jsou extrémními hodnotami normálové křivosti ve směrech X_i .

Důkaz. Odečtením rovnic (důsledek (3))

$$\begin{aligned} \xi_2^T (h_u - \lambda_1 g_u) \xi_1 &= 0, \\ \xi_1^T (h_u - \lambda_2 g_u) \xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Z (3) dále odvodíme

$$II_x(X_i, Y) = \lambda_i I_x(X_i, Y), \quad Y \in T_x S,$$

z čehož plyne $L_x X_i = \lambda_i X_i$ a $\kappa_n(X_i, X_i) = \lambda_i$. □

Mohou nastat tyto případy:

1. Rovnice (4) má jediné řešení λ_1 , pak $\lambda_1 = \kappa_n(X)$ pro všechna $X \in T_x^1 S$ (každý směr je hlavním směrem):
 - (a) $\lambda_1 = 0$, x je *planární bod* plochy,
 - (b) $\lambda_1 \neq 0$, x je *kruhový bod* plochy.
2. Rovnice (4) má dvě řešení $\lambda_1 < \lambda_2$, odpovídající hlavní směry X_1, X_2 ($X_i = D\varphi(u)\xi_i$) jsou navzájem kolmé:

- (a) $\lambda_1\lambda_2 > 0$, x je *eliptický bod* plochy,
- (b) $\lambda_1\lambda_2 = 0$, x je *parabolický bod* plochy,
- (c) $\lambda_1\lambda_2 < 0$, x je *hyperbolický bod* plochy.

Definice 3.4. Funkce $K(x) = \lambda_1(x)\lambda_2(x)$ se nazývá *Gaussova křivost* a $H(x) = \frac{\lambda_1(x)+\lambda_2(x)}{2}$ *střední křivost* plochy. (Je-li jediná hlavní křivost, klademe $\lambda_2 = \lambda_1$.)

Věta 3.6. Je-li $\varphi : U \rightarrow S$ mapa a $\varphi(u) = x$, pak

$$K(x) = \frac{\det h_u}{\det g_u}, \quad (5)$$

$$H(x) = \frac{g_u^{11}h_u^{22} + g_u^{22}h_u^{11} - 2g_u^{12}h_u^{12}}{2\det g_u} \quad (6)$$

(g_u^{ij}, h_u^{ij} značí prvky matic g_u, h_u).

Důkaz: Vzorce se odvodí přímo z (4).

Důsledek: K, H jsou diferencovatelné funkce na ploše S .

Lemma 3.7. Je-li $\lambda_1(x_0) \neq \lambda_2(x_0)$, pak existuje okolí V bodu x_0 a funkce λ_1, λ_2 diferencovatelné na $S \cap V$ takové, že $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$ jsou hlavní křivosti plochy v bodě x pro každý $x \in S \cap V$.

Důkaz. Zvolme mapu $\varphi : U \rightarrow S$ s $\varphi(u_0) = x_0$. Aplikujeme větu o implicitních funkcích pro funkci

$$\Phi(\lambda, u) = \lambda^2 - 2H(\varphi(u))\lambda + K(\varphi(u)) = 0$$

v bodech $(\lambda_1(x_0), u_0)$ a $(\lambda_2(x_0), u_0)$ Podmínka $\lambda_1(u_0) \neq \lambda_2(u_0)$ zaručuje, že

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda_i(x_0), u_0) = 2(\lambda_i(x_0) - H(\varphi(u_0))) \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

□

Definice 3.5. Buď S orientovaná plocha.

1. Regulární parametrizovaná křivka $c : I \rightarrow S$ na ploše S je *hlavní křivkou*, jestliže $c'(t)$ je hlavním směrem pro každé $t \in I$.
2. Nenulový vektor $X \in T_x S$ je *asymptotickým směrem* na ploše S v bodě x , jestliže $II_x(X, X) = 0$.
3. Regulární parametrizovaná křivka $c : I \rightarrow S$ na ploše S je *asymptotickou křivkou*, jestliže $c'(t)$ je asymptotickým směrem pro každé $t \in I$.

Tvrzení 3.8. Buď S plocha a $x \in S$.

1. Je-li $K(x) > 0$, neexistuje v x žádný asymptotický směr.

2. Je-li $K(x) < 0$, existují v x právě dva různé asymptotické směry.
3. Je-li $K(x) = 0$ a $0 = \lambda_1(x) \neq \lambda_2(x)$, existuje v x právě jeden asymptotický směr, který je zároveň hlavním směrem.
4. Je-li $K(x) = 0$ a $0 = \lambda_1(x) = \lambda_2(x)$, je v x každý směr asymptotický.

Důkaz. Tvzení plyne přímo z definic. Využívá faktu, že normálová křivost nabývá na jednotkové kružnici nejvýše dvou lokálních extrémů ve dvou na sebe kolmých směrech. \square

Věta 3.9. *Bud' $\varphi : U \rightarrow S$ mapa plochy S . Regulární parametrizovaná křivka $c(t) = \varphi(u(t), v(t))$, $t \in I$, na ploše S je (7) hlavní, (8) asymptotická, právě tehdy, když vyhovuje rovnici*

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ g^{11} & g^{12} & g^{22} \\ h^{11} & h^{12} & h^{22} \end{pmatrix} = 0, \quad (7)$$

$$h^{11}(u')^2 + 2h^{12}u'v' + h^{22}(v')^2 = 0. \quad (8)$$

Důkaz. Pro hlavní křivku využijeme rovnice (3), z níž plyne, že c je hlavní křivka právě tehdy, když pro každé t jsou vektory $g\xi$ a $h\xi$ lineárně závislé, kde $g = g_{u(t),v(t)}$ a $\xi = (u'(t), v'(t))^T$. Toto je dále ekvivalentní vztahu

$$0 = \det(g\xi, h\xi) = \det \begin{pmatrix} g^{11}u' + g^{12}v', & h^{11}u' + h^{12}v', \\ g^{12}u' + g^{22}v', & h^{12}u' + h^{22}v' \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

což je stejná rovnice, jako v (7). Ekvivalence pro asymptotickou křivku plyne přímo z definice. \square

Přednáška 16.5.2023

3.3 Geodetiky na ploše

Tvrzení 3.10 (Délka křivky na ploše). *Je-li $c : I \rightarrow S$ regulární křivka na ploše S , pak její délka je rovna*

$$L(c) = \int_I \sqrt{I_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt.$$

Je-li $\varphi : U \rightarrow S$ mapa S a $c = \varphi \circ u$, pak

$$L(c) = \int_I \sqrt{g_{u(t)}(u'(t), u'(t))} dt.$$

Důkaz. Vzorce plynou přímo ze vztahu $L(c) = \int_I \|c'(t)\| dt$ a z definice první fundamentální formy plochy. \square

Motivace pro definici geodetik. Mějme orientovanou plochu S a regulární parametrizovanou křivku $c : I \rightarrow S$ na ploše S . Hledáme podmínky zaručující, že křivka c spojuje nejkratším možným způsobem libovolné své dva různé dostatečně blízké body. Pozměníme málo křivku c na okolí nějakého bodu $x = c(t)$ výchylkou ve směru tečném k ploše a kolmém k tečně křivky:

$$c_\varepsilon(t) = c(t) + \varepsilon \alpha(t)(c'(t) \times N(c(t))),$$

kde $N(t) = n(u(t))$, $\varepsilon > 0$ malé a $\alpha(t)$ je libovolná diferencovatelná funkce. Délka části křivky c_ε je $\int_I \|c'_\varepsilon\|$. Chceme, aby tato délka byla minimální pro $\varepsilon = 0$ při libovolné volbě funkce α , což znamená podmínku

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \|c'_\varepsilon\| \right|_{\varepsilon=0} = 0,$$

$\alpha \geq 0$ libovolná. Máme

$$c'_\varepsilon = c' + \varepsilon \alpha'(c' \times (N \circ c)) + \varepsilon \alpha(c'' \times (N \circ c)) + \varepsilon \alpha(c' \times (N \circ c)'),$$

tedy

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \|c'_\varepsilon\| \right|_{\varepsilon=0} &= \frac{\langle c', (\alpha'(c' \times (N \circ c)) + \alpha(c'' \times (N \circ c)) + \alpha(c' \times (N \circ c)')) \rangle}{\|c'\|} \\ &= \frac{\alpha}{\|c'\|} \det(c', c'', N \circ c). \end{aligned}$$

Poslední výraz je roven 0 pro libovolnou α , právě když jsou vektory c' , c'' , $N \circ c$ lineárně závislé.

Definice 3.6. Regulární křivka $c : I \rightarrow S$ na ploše S se nazývá *geodetikou*, jestliže

$$\det(c'(t), c''(t), N(c(t))) = 0 \text{ pro každé } t \in I.$$

Pozn.: Vlastnost křivky 'být geodetikou na ploše' je zřejmě invariantní vůči změně parametrů křivky i plochy.

Příklady

1. V rovině jsou geodetiky právě všechny přímky.
2. Na sféře $\{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ jsou geodetiky (právě) všechny hlavní kružnice, tj. kružnice maximálního poloměru r .
3. Část přímky je geodetikou na libovolné ploše.
4. Na válcové ploše $\{x^2 + y^2 = 1\}$ parametrizované mapou

$$f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)^T$$

jsou geodetiky 'spirály' parametrizované např. $u = \alpha_1 t + \beta_1$, $v = \alpha_2 t + \beta_2$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$ (tyto křivky odpovídají přímkám po 'rozbalení' plochy do roviny).

Věta 3.11. *Bud' S plocha a $x \in S$. Pak existuje okolí V bodu x tak, že každá geodetika $c : I \rightarrow S \cap V$ na ploše S je nejkratší spojnici na ploše libovolných dvou svých bodů (jinými slovy, délka libovolné křivky na ploše spojující dva body $c(a), c(b)$, $a, b \in I$, je větší nebo rovna délce geodetiky $c|_{[a, b]}$ a rovnost nastává pouze v případě, kdy obrazy obou křivek splývají).*

[Bez důkazu]

Poznámka: Věta skutečně platí jen lokálně: z příkladu válcové plochy je zřejmé, že libovolné dva její body, které neleží na společné 'rovnoběžce' (kružnici kolmé k ose válce), lze spojit nekonečně mnoha geodetickými křivkami ('spirálami') libovolně velké délky.

Definice 3.7. Bud' S orientovaná plocha a $c : I \rightarrow S$ regulární křivka na ploše S . *Geodetickou křivost* křivky c definujeme předpisem

$$\kappa_g(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t), N(c(t)))}{\|c'(t)\|^3}, \quad t \in I.$$

Poznámky:

1. Není těžké ověřit, že absolutní hodnota geodetické křivosti nezávisí na parametrizaci křivky. Znaménko geodetické křivosti lze změnit změnou orientace jak křivky, tak plochy.
2. Z definice je zřejmé, že křivka c je geodetikou, právě když její geodetická křivost je nulová.

Věta 3.12. Pro křivku $c : I \rightarrow S$ na ploše S platí

$$|\kappa_g(t)| = \kappa(t) \sin \theta(t), \quad t \in I,$$

kde $\kappa(t)$ je křivost křivky c v \mathbb{R}^3 a $\theta(t) \in [0, \pi/2]$ je úhel mezi normálou plochy a oskulační rovinou křivky v neinflexním bodě t křivky.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že křivka je parametrizovaná obloukem. Z definice geodetické křivosti a z Frenetových vzorců pro křivku dostaneme

$$\begin{aligned} |\kappa_g(s)| &= |\det(c'(s), c''(s), N(c(s)))| \\ &= |\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s), N(c(s)))| \\ &= \kappa(s) |\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), N(c(s)))| \\ &= \kappa(s) |\langle \mathbf{b}(s), N(c(s)) \rangle| \\ &= \kappa(s) \sin \theta(s). \end{aligned}$$

□

Využijeme-li Meusnierovu větu (Důsledek 3.4) a nezávislost křivosti na parametrizaci, dostáváme

Důsledek 3.13. Pro regulární křivku $c : I \rightarrow S$ na ploše S platí následující vztah mezi obyčejnou a geodetickou křivostí křivky a normálovou křivostí plochy:

$$\kappa^2(t) = \kappa_n^2(c'(t)) + \kappa_g^2(t), \quad t \in I.$$

Definice 3.8. Křivka $c : I \rightarrow S$ na ploše S je parametrizovaná geodetika, jestliže je geodetika a navíc platí $\|c'(t)\| = \text{konst.}$ na I .

Pozn.: Zřejmě $c : I \rightarrow S$ je parametrizovaná geodetika právě tehdy, když pro každé t je vektor $c''(t)$ násobkem normálového vektoru $N(c(t))$ plochy. (Derivováním vztahu $\langle c'(t), c'(t) \rangle = \text{konst.}$ totiž dostaneme $\langle c'(t), c''(t) \rangle = 0$.)

Definice 3.9 (Christoffelovy symboly plochy). Buď $\varphi : U \rightarrow S$ mapa plochy S a pišme stručně $\varphi_i := \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$, $\varphi_{ij} := \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}$, $i, j = 1, 2$. Vektory $\{\varphi_1(u), \varphi_2(u), n(u)\}$ tvoří bázi \mathbb{R}^3 pro libovolné $u \in U$ a můžeme vyjádřit vektory $\varphi_{ij}(u)$ vzhledem k této bázi:

$$\varphi_{ij}(u) = \Gamma_{ij}^1(u) \varphi_1(u) + \Gamma_{ij}^2(u) \varphi_2(u) + h_u^{ij} n(u). \quad (9)$$

Koeficienty $\Gamma_{ij}^k(u)$ v tomto rozkladu se nazývají *Christoffelovy symboly plochy* v bodě u ($i, j, k = 1, 2$).

Pozn.: Koeficienty h_u^{ij} v rozkladu (9) jsou příslušné koeficienty matice h_u druhé fundamentální formy plochy, což plyne z rovnosti $\langle \varphi_{ij}(u), n(u) \rangle = h_u^{ij}$.

Cvičení: Platí

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \end{pmatrix} = (g^{-1}) \begin{pmatrix} \langle \varphi_{ij}, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_{ij}, \varphi_2 \rangle \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2.$$

Rovnice pro parametrizované geodetiky Pro křivku $c = \varphi \circ u : I \rightarrow S$ na ploše S platí

$$c'(t) = u'_1(t)\varphi_1(u(t)) + u'_2(t)\varphi_2(u(t))$$

a pro druhou derivaci dostaneme

$$\begin{aligned} c'' &= \sum_i u''_i \varphi_i + \sum_i \sum_j u'_i u'_j \varphi_{ij} \\ &= \sum_i u''_i \varphi_i + \sum_i \sum_j u'_i u'_j (\Gamma_{ij}^1 \varphi_1 + \Gamma_{ij}^2 \varphi_2 + h^{ij} n) \\ &= \sum_k \left(u''_k + \sum_i \sum_j u'_i u'_j \Gamma_{ij}^k \right) \varphi_k + \sum_i \sum_j h^{ij} n u'_i u'_j. \end{aligned}$$

Aby c byla parametrizovaná geodetika, musí být koeficienty u φ_k v posledním vyjádření nulové. Tím jsme odvodili následující větu.

Věta 3.14 (Rovnice pro geodetiky). *Křivka $c = \varphi \circ u : I \rightarrow S$ na ploše S s mapou φ je parametrizovaná geodetika právě tehdy, když*

$$\begin{aligned} u''_1 + \sum_i \sum_j u'_i u'_j \Gamma_{ij}^1 &= 0, \\ u''_2 + \sum_i \sum_j u'_i u'_j \Gamma_{ij}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Výše uvedená soustava je soustavou lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu pro dvojici funkcí $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ a z teorie takovýchto rovnic plyne:

Věta 3.15. *Bud' S plocha a $x \in S$. Ke každému vektoru $0 \neq X \in T_x S$ existuje právě jedna parametrizovaná geodetika $c : I \rightarrow S$ taková, že $c(0) = x$ a $c'(0) = X$.*