

Geometrie 2

ZS 2025/26

Jan Rataj

5. listopadu 2025

1. přednáška 2.10.2025

0 Úvod

Přednáška bude mít tyto tři části:

1. Plochy v $\mathbb{R}^n$, tečný prostor, míra na plochách, plošný integrál prvního druhu, Gaussova-Ostrogradského věta.
2. Diferenciální formy v $\mathbb{R}^n$, integrace diferenciálních forem, Stokesova věta.
3. Základy diferenciální geometrie ploch v $\mathbb{R}^3$: hlavní směry a hlavní křivosti plochy, Gaussova a střední křivost, geodetiky.

Připomeňme dvě důležité věty z Matematické analýzy, které budeme opakovane používat. Pro totální diferenciál zobrazení $f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ budeme používat značení $Df(u) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($u \in U$).

Pozn.: Okolím bodu p v metrickém prostoru X budeme rozumět libovolnou otevřenou množinu $U \subset X$ obsahující bod p .

Věta 0.1 (Věta o implicitních funkcích). Bud' $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $F : G \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ zobrazení třídy C^m ($m \geq 1$) a bod $(x_0, y_0) \in G \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ nechť splňuje $F(x_0, y_0) = 0$ a

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0) \right)_{i,j=1}^{n-k} \neq 0.$$

Pak existují okolí $U \subset \mathbb{R}^k$ bodu x_0 a $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ bodu y_0 taková, že $U \times V \subset G$, a existuje zobrazení $g : U \rightarrow V$ třídy C^m takové, že pro každé $x \in U$, $F(x, g(x)) = 0$ a $g(x)$ je jediným bodem $y \in V$, pro nějž $F(x, y) = 0$.

Věta 0.2 (Věta o inverzním zobrazení, či o lokálním difeomorfismu). Bud' $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ zobrazení třídy C^m ($m \geq 1$) a $x_0 \in U$ takový, že matice $Dg(x_0)$ je regulární. Pak existuje okolí $U_0 \subset U$ bodu x_0 takové, že $V_0 := g(U_0)$ je otevřená množina a $g|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ je difeomorfismus třídy C^m (tedy prosté zobrazení a $(g|_{U_0})^{-1}$ je třídy C^m).

1 Plošný integrál prvního druhu

1.1 Plochy v $\mathbb{R}^n$

Definice 1.1. (i) *Parametrizovanou k -plochou* třídy C^m rozumíme zobrazení $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ třídy C^m definované na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^k$ a splňující $\text{rank } D\varphi(u) = k$, $u \in U$. Neuvedeme-li konkrétní třídu hladkosti C^m , budeme vždy mít na mysli hladkost třídy C^∞ .

(ii) Parametrizovanou k -plochu $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazveme *k -mapou*, jestliže φ je homeomorfismus U na $\varphi(U)$.

Příklady:

1. Regulární parametrizovaná křivka $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ je parametrizovanou 1-plochou.

2. Zobrazení

$$\varphi : (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, u), \quad u > 0, v \in \mathbb{R},$$

je parametrizovaná 2-plocha, ale ne mapa.

3. Ani prostá parametrizovaná plocha nemusí být mapou (příklad bude na cvičení).

Tvrzení 1.1 (Graf funkce je mapa). *Je-li $U \subset \mathbb{R}^k$ otevřená a $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ je třídy C^m ($m \geq 1$), pak zobrazení*

$$\varphi : u \mapsto (u, f(u))$$

je k -mapa třídy C^m (v $\mathbb{R}^n$).

Důkaz. Je zřejmé, že φ je prosté, třídy C^m a $\text{rank } D\varphi = k$ na U . Zbývá ukázat, že φ^{-1} je spojitě na $\varphi(U)$. φ^{-1} je ovšem restrikcí projekce z $\mathbb{R}^n$ do prvních k souřadnic, tedy jako restrikce spojitěho zobrazení je též spojitě. $\square$

Věta 1.2 (Parametrizovaná plocha je lokálně mapou). *Bud' $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ třídy C^m ($m \geq 1$). Pak platí:*

(i) *Je-li $u \in U$ takový, že $\text{rank } D\varphi(u) = k$, pak existuje okolí $U_0 \subset U$ bodu u takové, že restrikce $\varphi|_{U_0}$ je k -mapa třídy C^m .*

(ii) *Je-li $U_0 \subset U$ omezená otevřená podmnožina taková, že $\overline{U_0} \subset U$, φ je prosté na U_0 , $\text{rank } D\varphi = k$ na U_0 a $\varphi(U_0) \cap \varphi(\partial U_0) = \emptyset$, pak $\varphi|_{U_0}$ je k -mapa třídy C^m .*

Důkaz. (i) Protože $\text{rank } D\varphi(u) = k$, je aspoň jedna čtvercová podmatice $D\varphi(u)$ regulární (to je důsledek Cauchy-Binetova vzorce ze cvičení). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u)\right)_{i,j=1}^k$ je regulární. Pak zobrazení $h : u \mapsto$

$(\varphi_1(u), \dots, \varphi_k(u))$ z U do $\mathbb{R}^k$ má regulární diferenciál v bodě u , a podle věty o inverzním zobrazení je tedy na okolí u difeomorfismem, speciálně tedy je $\text{rank } Dh = k$ na U_0 a $h|_{U_0}$ je homeomorfismus. Pak zřejmě i $\text{rank } D\varphi = k$ na U_0 a $\varphi|_{U_0}$ je homeomorfismus, tedy $\varphi|_{U_0}$ je k -mapa.

(ii) Potřebujeme ukázat, že $(\varphi|_{U_0})^{-1}$ je spojitý na $\varphi(U_0)$. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není, tedy že existuje posloupnost $x_i = \varphi(u_i) \in \varphi(U_0)$, $x_i \rightarrow x_0 = \varphi(u_0)$, a přitom $u_i \not\rightarrow u_0$. Množina U_0 je omezená, tedy existuje podposloupnost $u_{\sigma(i)} \rightarrow u' \in \overline{U_0}$, $u' \neq u_0$. Ze spojitosti φ plyne $\varphi(u_{\sigma(i)}) = x_{\sigma(i)} \rightarrow \varphi(u')$, tedy $\varphi(u') = \varphi(u_0)$. Dále podle předpokladu musí ležet i $u' \in U_0$, a protože φ je prosté na U_0 dostáváme $u' = u_0$, tedy spor. $\square$

Příklad - mapa sféry: Zobrazení

$$\varphi : (u, v) \mapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$$

je 2-mapa na $(-\pi + C, \pi + C) \times (-\pi/2, \pi/2)$ pro libovolné $C \in \mathbb{R}$.

Definice 1.2 (plocha). Neprázdnou množinu $S \subset \mathbb{R}^n$ nazveme k -plochou (třídy C^m), jestliže ke každému bodu $x \in S$ existuje $V \subset \mathbb{R}^n$ okolí bodu x a k -mapa (třídy C^m) $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ taková, že $\varphi(U) = V \cap S$. Řekneme pak, že každá taková mapa ϕ je mapou plochy S . Speciálně obraz $\text{im } \varphi = \varphi(U)$ jedné k -mapy φ nazveme *jednoduchou k -plochou*.

Pozn.: Podle definice je tedy obraz $\text{im } \varphi$ mapy φ plochy S relativně otevřenou podmnožinou plochy S .

Definice 1.3 (atlas plochy). Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha, pak libovolný soubor $\mathcal{A}$ map plochy S s vlastností $S = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \text{im } \varphi$ nazveme *atlasem* plochy S .

Příklady:

1. Graf funkce $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ třídy C^1 je jednoduchou k -plochou.
2. Množina $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$ je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$ s atlasem $\mathcal{A} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$,

$$\varphi_1(u, v) = \varphi_2(u, v) = (\cos v, \sin v, u),$$

$$\text{dom } \varphi_1 = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi), \text{ dom } \varphi_2 = \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

Věta 1.3 (Implicitně zadaná plocha). Bud' $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $f : G \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ zobrazení třídy C^m . Nechť v každém bodě $x \in f^{-1}(\{0\})$ platí $\text{rank } Df(x) = n-k$. Pak $f^{-1}\{0\}$ je k -plocha třídy C^m .

Důkaz. Nechť $a \in f^{-1}(\{0\})$. Protože $\text{rank } Df(a) = n-k$, existuje regulární čtvercová submatice $Df(a)$ o $n-k$ řádcích (důsledek Cauchy-Binetova vzorce ze cvičení). Budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i=1, j=k+1}^{n-k, n}$$

je regulární. Podle věty o implicitních funkcích existuje okolí U bodu $(a_1, \dots, a_k)$, okolí V bodu $(a_{k+1}, \dots, a_n)$ a C^m zobrazení $g : U \rightarrow V$ takové, že $g(a_1, \dots, a_k) = (a_{k+1}, \dots, a_n)$ a

$$\text{graf } g := \{(u, g(u)) : u \in U\} = f^{-1}(\{0\}) \cap (U \times V).$$

Tedy $f^{-1}(\{0\})$ je k -plocha. □

Příklady:

1. Jednotková sféra v $\mathbb{R}^n$,

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\},$$

je $(n-1)$ -plocha.

2. Množina

$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

je 2-plocha v $\mathbb{R}^4$.

2. přednáška 9.10.2025

Je-li L lineární podprostor $\mathbb{R}^n$, pak symbolem $L^\perp$ budeme značit ortogonální podprostor k L ($L^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n : \langle u, v \rangle = 0, u \in L\}$).

Věta 1.4 (plochu lze lokálně parametrizovat jako graf funkce). *Bud' $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha třídy C^m ($m \geq 1$). Pak ke každému bodu $x \in S$ existuje okolí V (v $\mathbb{R}^n$), k -rozměrný podprostor $L \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset L$ otevřená a zobrazení $h : W \rightarrow L^\perp$ takové, že*

$$\text{graf } h := \{w + h(w) : w \in W\} = S \cap V.$$

Důkaz. Podle definice k -plochy k danému bodu $x \in S$ existuje k -mapa $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow S$ třídy C^m taková, že $\varphi(U)$ je relativně otevřená podmnožina S a $x = \varphi(u)$ pro nějaký $u \in U$. Protože $\text{rank } D\varphi(u) = k$, má $D\varphi(u)$ (podle Cauchy-Binetova vzorce) regulární čtvercovou podmatici $k \times k$, tedy existuje $I \subset \{1, \dots, n\}$, $|I| = k$, tak, že

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u) \right)_{i \in I, 1 \leq j \leq k}$$

je regulární matice. Označme $L := \text{Lin}\{e_i : i \in I\}$, Π nechť je ortogonální projekce z $\mathbb{R}^n$ do L , a $v := \Pi(x)$. Zobrazení $g := \Pi \circ \varphi$ splňuje předpoklady věty o inverzním zobrazení, tedy existuje $U_0 \subset U$ otevřená, $u \in U_0$, taková, že $W := g(U_0) \subset L$ je otevřená a $g : U_0 \rightarrow W$ je difeomorfismus třídy C^m . Položme

$$h : w \mapsto \varphi \circ g^{-1}(w) - w, \quad w \in W.$$

Zřejmě $h : W \rightarrow L^\perp$ je třídy C^m a

$$\{w + h(w) : w \in W\} = \varphi(U_0)$$

je relativně otevřená podmnožina S (neboť φ je homeomorfismus), tedy $\varphi(U_0) = S \cap V$ pro nějakou otevřenou množinu $V \subset \mathbb{R}^n$. $\square$

Definice 1.4. Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je lokálně uzavřená, jestliže $A = F \cap G$ pro nějakou $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou a $F \subset \mathbb{R}^n$ uzavřenou.

Pozn.: Každá lokálně uzavřená množina je Borelovská. Dále platí: A je lokálně uzavřená právě tehdy, když A je relativně otevřená v uzávěru $\overline{A}$ (cvičení).

Tvrzení 1.5 (lokální uzavřenost plochy). *Každá k -plocha v $\mathbb{R}^n$ je lokálně uzavřená.*

Důkaz. Ukážeme, že ke každému bodu $x \in S$ existuje k -mapa $\varphi_x : U_x \rightarrow S$ taková, že $x \in \varphi_x(U_x)$ a $\varphi_x(U_x) = \overline{S} \cap V_x$ pro nějakou $V_x \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou. Pak platí

$$S = \left(\bigcup_{x \in S} V_x \right) \cap \overline{S},$$

tedy S je lokálně uzavřená.

Ke každému $x \in S$ existuje k -mapa $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow S$ taková, že $x = \varphi(u)$ pro nějaký $u \in U$. Bud' U_x omezená otevřená množina obsahující u a taková, že $\overline{U_x} \subset U$. Pak $\varphi_x := \varphi|_{U_x}$ je k -mapa a tedy existuje $V_x \subset \mathbb{R}^n$ otevřená taková, že $\varphi_x(U_x) = V_x \cap S$. Ukážeme, že $V_x \cap S = V_x \cap \overline{S}$, tedy že φ_x je hledaná k -mapa. Nechť $x_0 \in V_x \cap \overline{S}$. Pak existuje posloupnost $x_i \in V_x \cap S$, $x_i \rightarrow x_0$, $x_i = \varphi(u_i)$, $u_i \in U_x$. Protože $\overline{U_x}$ je kompaktní, můžeme (přechodem k podposloupnosti) předpokládat, že $u_i \rightarrow u_0 \in \overline{U_x}$. Pak (φ je spojitý) platí $x_i = \varphi(u_i) \rightarrow \varphi(u_0)$, a tedy $x_0 = \varphi(u_0)$, tedy nutně $x_0 \in S$. $\square$

1.2 Křivky na ploše a tečný prostor

Pod *regulární parametrizovanou křivkou* na množině $M \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme zobrazení $c : I \rightarrow M$ třídy C^1 definované na intervalu I a splňující $c'(t) \neq 0$, $t \in I$.

Tvrzení 1.6 (o křivce na ploše). *Bud' $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ k -mapa a $c : I \rightarrow \varphi(U)$ regulární parametrizovaná křivka na jednoduché k -ploše $\varphi(U)$. Pak $u := \varphi^{-1} \circ c : I \rightarrow U$ je regulární parametrizovaná křivka v U a platí $c = \varphi \circ u$.*

Důkaz. Zobrazení $u = \varphi^{-1} \circ c$ je zřejmě spojitý na intervalu I . Ukážeme, že u je třídy C^1 . Zvolme $t_0 \in I$ a označme $x_0 := c(t_0)$, $u_0 := \varphi^{-1}(x_0)$ a $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Protože $\text{rank } D\varphi(u_0) = k$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že matice $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u_0)\right)_{i,j=1}^k$ je regulární. Označme $\Pi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$ projekci do prvních k souřadnic a $v_0 := \Pi(x_0)$. Zobrazení $g := \Pi \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ je třídy C^1 a $Dg(u_0)$ je regulární, tedy podle věty o inverzním zobrazení existuje inverzní zobrazení g^{-1} definované na nějakém okolí V bodu v_0 , platí přitom $g^{-1} \circ \Pi = \varphi^{-1}$ na $\varphi(U) \cap \Pi^{-1}(V)$. Pro všechna $t \in (\Pi \circ c)^{-1}(v_0)$ je pak

$$u(t) = \varphi^{-1} \circ c(t) = g^{-1} \circ \Pi \circ c(t),$$

tedy u je třídy C^1 na $(\Pi \circ c)^{-1}(v_0)$, což je okolí bodu t_0 . $\square$

Pozn.: Ze vztahu $c = \varphi \circ u$ plyne

$$c'(t) = D\varphi(u(t))(u'(t)) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u(t)) u'_i(t), \quad t \in I.$$

Definice 1.5. Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ je *tečným vektorem* k ploše $S \subset \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in S$, jestliže $v = 0$ nebo existuje regulární parametrizovaná křivka $c : I \rightarrow S$ na ploše S a bod $t_0 \in I$ tak, že $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$. Množinu všech tečných vektorů plochy S v bodě $x \in S$ značíme $T_x S$.

Věta 1.7 (popis tečných vektorů plochy). *Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha a $x \in S$, pak $T_x S$ je k -rozměrný lineární podprostor $\mathbb{R}^n$. Je-li navíc $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow S$ mapa plochy S s vlastností $\varphi(u) = x$ pro nějaký $u \in U$, pak*

$$T_x S = \text{Lin} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u) \right\} \quad (1)$$

a $D\varphi(u)$ zobrazuje bijektivně $\mathbb{R}^k$ na $T_x S$.

Úmluva: Budeme používat symbol $d\varphi(u)$ pro bijekci $\mathbb{R}^k \rightarrow T_x S$.

Důkaz. Stačí ukázat rovnost (1) (protože parciální derivace $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u)$ jsou lineárně nezávislé).

(a) Necht $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u)$ pro nějaké $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (0, \dots, 0)$. Uvažujme křivku

$$c(t) := \varphi(u_1 + \alpha_1 t, \dots, u_k + \alpha_k t), \quad t \in (-\delta, \delta),$$

kde $\delta > 0$ je tak malé, aby argument ležel v definičním oboru mapy φ . Pak c je zřejmě regulární parametrizovaná křivka na ploše S a platí $c(0) = x$ a $c'(0) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u)$.

(b) Necht $c : I \rightarrow S$ je regulární parametrizovaná křivka, $c(t_0) = x$. Předpokládejme, že celý obraz křivky c leží v obrazu k -mapy φ . Pak podle předchozího tvrzení $c = \varphi \circ u$ pro regulární parametrizovanou křivku $u = \varphi^{-1} \circ c$, a tedy

$$c'(t_0) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u(t_0)) u'_i(t_0).$$

□

Věta 1.8 (změna parametrů plochy). *Bud' $\varphi : U \rightarrow S$, $\psi : V \rightarrow S$ dvě mapy plochy S takové, že $M := \varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. Pak zobrazení $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(M) \rightarrow \psi^{-1}(M)$ je C^1 difeomorfismus a pro $\varphi(u) = \psi(v) \in M$ platí*

$$D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u) = (d\psi(v))^{-1} \circ d\varphi(u).$$

Důkaz. Bud' $x = \varphi(u) = \psi(v) \in M$ (pro vhodné $u \in U$ a $v \in V$). Označme Π kolmou projekci z $\mathbb{R}^n$ do lineárního podprostoru $T_x S$ a $g := \Pi \circ \varphi$, $h := \Pi \circ \psi$ (tedy $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, $h : V \rightarrow \mathbb{R}^k$). Diferenciály $Dg(u)$ a $Dh(v)$ jsou regulární, tedy g , resp. h , jsou C^1 difeomorfismy na nějakém okolí bodu u , resp. v . Tedy i $h^{-1} \circ g = \psi^{-1} \circ \varphi$ je C^1 difeomorfismus na okolí bodu u . Protože $\varphi = \psi \circ (\psi^{-1} \circ \varphi)$, musí být

$$D\varphi(u) = D\psi(\psi^{-1}(\varphi(u))) \circ D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u),$$

tedy i $d\varphi(u) = d\psi(v) \circ D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u)$, z čehož už plyne

$$(d\psi(v))^{-1} \circ d\varphi(u) = D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u).$$

□

3. přednáška, 16.10.2025

Definice 1.6. Řekneme, že zobrazení $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ definované na k -ploše S třídy C^m je *diferencovatelné* třídy C^m , jestliže pro každou k -mapu $\varphi : U \rightarrow S$ je $\Phi \circ \varphi$ třídy C^m . Je-li $\varphi : U \rightarrow S$ k -mapa a $x = \varphi(u)$, definujeme *diferenciál* zobrazení Φ v bodě x jako

$$D\Phi(x) := D(\Phi \circ \varphi)(u) \circ (d\varphi(u))^{-1}.$$

Pozn.:

1. $D\Phi(x)$ je lineární zobrazení z $T_x S$ do $\mathbb{R}^m$.
2. Diferencovatelnost Φ stačí ověřit jen pro mapy z nějakého atlasu plochy S .
3. Pro každou mapu φ plochy S je inverzní zobrazení φ^{-1} třídy C^m na ploše $\text{im } \varphi \subset S$.

Tvrzení 1.9 (korektnost definice diferenciálu na ploše). *Definice diferenciálu zobrazení na ploše je korektní (nezávisí na volbě mapy).*

Důkaz. Bud' $\varphi : U \rightarrow S$ a $\psi : V \rightarrow S$ dvě k -mapy, $x = \varphi(u) = \psi(v)$. Pak $\Phi \circ \varphi = \Phi \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi$ na okolí bodu u , a tedy

$$D(\Phi \circ \varphi)(u) = D(\Phi \circ \psi)(v) \circ D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u) = D(\Phi \circ \psi)(v) \circ (d\psi(v))^{-1} \circ d\varphi(u),$$

což dává

$$D(\Phi \circ \varphi)(u) \circ (d\varphi(u))^{-1} = D(\Phi \circ \psi)(v) \circ (d\psi(v))^{-1}.$$

□

1.3 Míra na ploše, plošný integrál

Definice 1.7. Bud' $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ k -mapa. Na jednoduché k -ploše $S := \varphi(U)$ definujeme borelovskou míru μ_S předpisem

$$\mu_S(B) := \int_{\varphi^{-1}(B)} J_k \varphi(u) d\lambda^k(u), \quad B \subset S \text{ borelovská,}$$

kde

$$J_k \varphi(u) := \sqrt{\det(D\varphi(u)^T D\varphi(u))}, \quad u \in U.$$

Pozn.:

1. $J_k \varphi(u) > 0$, neboť $D\varphi(u)$ má plnou hodnotu (bylo na cvičení).
2. $J_k \varphi(u) = |\det d\varphi(u)|$, pokud lineární zobrazení $d\varphi(u) : \mathbb{R}^k \rightarrow T_{\varphi(u)} S$ reprezentujeme maticí vzhledem k libovolné ortonormální bázi tečného prostoru $T_{\varphi(u)} S$ (cvičení).

3. Je-li $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineární, $\text{rank } L = k$, a $M := L(\mathbb{R}^k)$, pak $\mu_M = \lambda_M$, kde λ_M je Lebesgueova míra na podprostoru M definovaná na prvním cvičení. K ověření si stačí uvědomit, že zobrazení $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow M$ reprezentované maticí $L(L^T L)^{-1/2}$ je izometrie, a tedy pro libovolnou borelovskou množinu $B \subset M$ platí

$$\begin{aligned}\lambda_M(B) &= \lambda^k(\phi^{-1}(B)) = \lambda^k((L^T L)^{1/2} L^{-1}(B)) \\ &= \sqrt{\det(L^T L)} \lambda^k(L^{-1}(B)) = \mu_M(B).\end{aligned}$$

Tvrzení 1.10 (korektnost definice míry na ploše). *Definice μ_S je korektní (nezávisí na volbě parametrizace).*

Důkaz. Mějme $\varphi : U \rightarrow S$ a $\psi : V \rightarrow S$ dvě k -mapy parametrizující plochu S . Pak $\psi^{-1} \circ \varphi : U \rightarrow V$ je C^1 -difeomorfismus a podle věty o substituci (z přednášky Teorie míry 1, dokázané v Teorii míry 2) platí (klademe $v = \psi^{-1} \circ \varphi(u)$) a píšeme stručně du, dv místo $d\lambda^k(u), d\lambda^k(v)$)

$$\begin{aligned}\int_{\psi^{-1}(B)} J_k \psi(v) dv &= \int_{\varphi^{-1}(B)} J_k \psi(v) |\det D(\psi^{-1} \circ \varphi)(u)| du \\ &= \int_{\varphi^{-1}(B)} |\det d\psi(v)| |\det(d\psi(v))^{-1}(d\varphi(u))| du \\ &= \int_{\varphi^{-1}(B)} J_k \varphi(u) du\end{aligned}$$

(použili jsme vzorec z věty o změně parametrů plochy). $\square$

Tvrzení 1.11 (existence spočetného atlasu). *Každá plocha v $\mathbb{R}^n$ má nejvýše spočetný atlas.*

Důkaz. Očíslujme si $\{U_1, U_2, \dots\}$ všechny koule v $\mathbb{R}^n$ s racionálními středy i poloměry. Nechť je dána k -plocha $S \subset \mathbb{R}^n$ a pro každý bod $x \in S$ označme φ_x nějakou k -mapu S splňující $x \in \text{im } \varphi_x$. Jistě existuje index $i(x)$ takový, že $x \in U_{i(x)} \cap S \subset \text{im } \varphi_x$. Ke každému $j \in J := \{i(x) : x \in S\}$ vyberme libovolnou mapu $\varphi_j := \varphi_x$ pro nějaké x s $i(x) = j$. Pak $\{\varphi_j : j \in J\}$ je atlas S . $\square$

Věta 1.12 (existence a jednoznačnost míry na ploše; definice). *Na každé k -ploše $S \subset \mathbb{R}^n$ existuje právě jedna Borelovská míra μ_S taková, že pro každou k -mapu φ plochy S platí $\mu_S|_{\text{im } \varphi} = \mu_{\text{im } \varphi}$.*

Důkaz. Buď $\{\varphi_i : i = 1, 2, \dots\}$ nějaký nejvýše spočetný atlas S . Uvažujme rozklad plochy $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots$, kde $S_1 := \text{im } \varphi_1$, $S_2 := \text{im } \varphi_2 \setminus \text{im } \varphi_1$, $S_3 := \text{im } \varphi_3 \setminus (\text{im } \varphi_1 \cup \text{im } \varphi_2)$, $\dots$. Položme

$$\mu_S(B) := \sum_i \mu_{\text{im } \varphi_i}(B \cap S_i), \quad B \in \mathcal{B}^n \cap S.$$

Je-li ψ libovolná k -mapa plochy S , pak pro libovolnou borelovskou množinu $B \subset \text{im } \psi$ platí

$$\mu_S(B) = \sum_i \mu_S(B \cap S_i) = \sum_i \mu_{\text{im } \varphi_i}(B \cap S_i) = \sum_i \mu_{\text{im } \psi}(B \cap S_i) = \mu_{\text{im } \psi}(B)$$

(ve třetí rovnosti jsme využili nezávislosti míry na parametrizaci jednoduché k -plochy). Jednoznačnost je zřejmá. $\square$

Definice 1.8 (Plošný integrál prvního druhu). Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha a $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ borelovsky měřitelná funkce, pak definujeme

$$\int_S f dS := \int_S f d\mu_S,$$

má-li integrál na pravé straně smysl (integrál chápeme jako abstraktní Lebesgueův integrál podle borelovské míry μ_S).

Pozn.: Symbol “ dS ” je tradičně používán pro tento typ plošného integrálu a nevztahuje se ke značení plochy S .

Věta 1.13 (Podplochy nižší dimenze mají míru nula). Bud' $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha a $S' \subset S$ l -plocha, $l < k$. Pak $\mu_S(S') = 0$.

Stručný důkaz. (a) Nejprve ukážeme, že pro libovolnou k -plochu $S \subset \mathbb{R}^n$ s $k < n$ platí $\lambda^n(S) = 0$. Pokud S = graf h pro nějakou diferencovatelnou funkci $h : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, pak podle Fubiniovy věty je

$$\lambda^n(\text{graf } h) = \int_U \lambda^{n-k}(\{(u, h(u))\}) \lambda^k(du) = 0.$$

Víme, že plochu S lze lokálně parametrizovat jako graf funkce, a stejně jako v důkazu existence spočetného atlasu ůlze ukázat, že plochu S lze pokrýt spočetně mnoha grafy funkcí, tedy $\lambda^n(S) = 0$.

(b) Použitím spočetných atlasů stačí ukázat větu pro případ jednoduchých ploch: $S = \varphi(U)$, $S' = \psi(V)$, kde $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ je k -mapa a $\psi : V \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ l -mapa. Složené zobrazení $\varphi^{-1} \circ \psi : V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k$ je třídy C^1 , což ukážeme podobně jako pro případ křivky na ploše ($l = 1$), tedy pomocí vhodné projekce plochy na okolí daného bodu do podprostoru dimenze k . Dále $\varphi^{-1} \circ \psi$ je regulární a je to homeomorfismus, tedy je to l -mapa v $U \subset \mathbb{R}^k$. Množina $Q := \varphi^{-1}(S')$ je tedy (jednoduchá) l -plocha v $\mathbb{R}^k$. Z části (a) plyne, že $\lambda^k(Q) = 0$, a tedy $0 = \mu_S(\varphi(Q)) = \mu_S(S')$. $\square$

4. přednáška (23.10.2025)

Věta 1.14 (Izometrie ploch). Je-li $S \subset \mathbb{R}^n$ k -plocha a $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ shodnost (izometrie), pak $\rho(S)$ je rovněž k -plocha a platí $\mu_{\rho(S)} = \mu_S \rho^{-1}$.

Důkaz. Je-li $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ k -mapa, pak $\rho \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ je rovněž k -mapa. Navíc platí $D(\rho \circ \varphi)(u) = R \circ D\varphi(u)$, $u \in U$, kde R je lineární složka shodnosti ρ , a tedy

$$J_k(\rho \circ \varphi)(u) = \sqrt{\det(D\varphi(u))^T R^T R (D\varphi(u))} = \sqrt{\det(D\varphi(u))^T (D\varphi(u))} = J_k\varphi(u).$$

Z toho plyne, že pro libovolnou borelovskou množinu $B \subset \text{im}(\rho \circ \varphi)$

$$\mu_{\text{im}(\rho \circ \varphi)}(B) = \mu_{\text{im} \varphi}(\rho^{-1}(B)).$$

K dokončení důkazu si stačí uvědomit, že pro libovolný atlas (φ_i) plochy S je $(\rho \circ \varphi_i)$ atlas plochy $\rho(S)$. $\square$

Definice 1.9 (zobecněná plocha). Neprázdná množina $S \subset \mathbb{R}^n$ je *zobecněná k -plocha*, jestliže existuje rozklad

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_p \cup M_1 \cup \dots \cup M_q \quad p \geq 1, q \geq 0,$$

kde $S_1, \dots, S_p$ jsou jednoduché k -plochy a M_j je l_j -plocha dimenze $0 \leq l_j < k$, $j = 1, \dots, q$ ($q \geq 0$), a platí podmínka

$$S_i \cap \left(\bigcup_{i' \neq i} \overline{S_{i'}} \cup \bigcup_{j=1}^q \overline{M_j} \right) = \emptyset, \quad i = 1, \dots, p.$$

Pozn.:

1. Pod 0-plochou rozumíme množinu izolovaných bodů.
2. Jednoduché k -plochy S_i nazveme *komponentami* S . Body $x \in S_i$ nazveme *regulárními body* plochy.
3. Poslední podmínka říká, že každá komponenta musí mít prázdný průnik s uzávěry všech ostatních komponent, jedná se tedy o zesílenou podmínku disjunktnosti. Je ekvivalentní disjunktnosti komponent plus relativní otevřenosti každé komponenty v S .
4. Standardním příkladem zobecněné $(n-1)$ -plochy je hranice jednotkové krychle $\partial[0, 1]^n$.
5. Není vůbec snadné ukázat, že každá k -plocha je zobecněnou k -plochou, my to ale nepotřebujeme. Je-li S zároveň k -plocha a zobecněná k -plocha, pak obě definice plošné míry splývají (snadné cvičení).

Definice 1.10 (míra na zobecněné ploše). Na zobecněné k -ploše $S = S_1 \cup \dots \cup S_p \cup M_1 \cup \dots \cup M_q$ definujeme míru μ_S předpisem

$$\mu_S := \mu_{S_1} + \dots + \mu_{S_p},$$

a plošný integrál prvního druhu jako integrál podle této míry.

Tvrzení 1.15 (korektnost definice μ_S). *Definice míry μ_S na zobecněné k -ploše S je konzistentní, tedy nezávisí na reprezentaci zobecněné plochy.*

Důkaz. Mějme dvě různé reprezentace zobecněné k -plochy S :

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_p \cup M_1 \cup \dots \cup M_q = S'_1 \cup \dots \cup S'_{p'} \cup M'_1 \cup \dots \cup M'_{q'}.$$

Ukážeme, že

$$\sum_{i=1}^p \mu_{S_i} = \sum_{j=1}^{p'} \mu_{S'_j},$$

což můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p'} \mu_{S_i} |S'_j = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p'} \mu_{S'_j} |S_i$$

(zde využíváme toho, že $\mu_{S_i}(M'_l) = \mu_{S'_j}(M_l) = 0$ pro všechna i, j, l).

Pokud $S_i = \varphi_i(U_i)$ a $S'_j = \varphi'_j(U'_j)$ jsou příslušné parametrizace, platí

$$S_i \cap S'_j = \varphi_i(U_i \cap ((\varphi_i)^{-1} \circ \varphi'_j(U'_j))) = \varphi'_j(U'_j \cap ((\varphi'_j)^{-1} \circ \varphi_i(U_i))).$$

Protože φ_i a φ'_j jsou homeomorfismy, je průnik $S_i \cap S'_j$ relativně otevřená množina jak v S_i , tak v S'_j , je to tedy buď prázdná množina, nebo jednoduchá k -plocha a podle Tvrzení 1.10 platí

$$\mu_{S_i} |S'_j = \mu_{S_i \cap S'_j} = \mu_{S'_j} |S_i.$$

□

1.4 Gaussova-Ostrogradského věta

Motivace: Newtonův vzorec říká že pro “rozumné” reálné funkce f jedné proměnné (absolutně spojitě funkce, speciálně pro funkce třídy C^1) platí

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Uvedeme zde analogii pro funkci více proměnných.

Bud' $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ otevřená omezená množina a g, h dvě reálné funkce třídy C^1 definované na nějakém okolí uzávěru $\bar{U}$ takové, že $g < h$ na U . Položme

$$\Omega := \{(u, t) \in U \times \mathbb{R} : g(u) < t < h(u)\}$$

(oblast mezi grafy, otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$). Mějme dále nějakou reálnou funkci F třídy C^1 definovanou na nějakém okolí uzavěru $\bar{\Omega}$. Pro každé $u \in U$ platí podle Newtonova vzorce

$$\int_{g(u)}^{h(u)} \frac{\partial F}{\partial x_n}(u, t) dt = F(u, h(u)) - F(u, g(u)).$$

Zintegrováním obou stran dostaneme

$$\int_U \int_{g(u)}^{h(u)} \frac{\partial F}{\partial x_n}(u, t) dt d\lambda^{n-1}(u) = \int_U F(u, h(u)) - F(u, g(u)) d\lambda^{n-1}(u).$$

Levou stranu můžeme s pomocí Fubiniovy věty zapsat jako $\int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x_n} d\lambda^n$. Necht $\nu(x)$ značí jednotkový vektor vnější normály k oblasti Ω v bodě x . Pokud $x = (u, t)$ leží na grafu funkce h , pak

$$\nu(x) = (\|\nabla h(u)\|^2 + 1)^{-1/2} \left(-\frac{\partial h}{\partial u_1}(u), \dots, -\frac{\partial h}{\partial u_{n-1}}(u), 1 \right).$$

Zobrazení $u \mapsto (u, h(u))$ parametrizující graf h má Jakobián $(\|\nabla h(u)\|^2 + 1)^{1/2}$, tedy lze psát

$$\int_U F(u, h(u)) d\lambda^{n-1}(u) = \int_{\text{graf } h} F \nu_n dS$$

s plošným integrálem na pravé straně, kde ν_n je n -tá souřadnice normálového vektoru ν . Analogický vzorec platí i pro graf g a dohromady dostaneme

$$\int_U F(u, h(u)) - F(u, g(u)) d\lambda^{n-1}(u) = \int_{\text{graf } g \cup \text{graf } h} F \nu_n dS.$$

Výše uvedenou rovnost tedy můžeme přepsat do tvaru

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x_n} d\lambda^n = \int_{\text{graf } g \cup \text{graf } h} F \nu_n dS.$$

Za dalších předpokladů na hranici U - například když je ∂U zobecněná $(n-2)$ -plocha - bude i $\partial\Omega$ zobecněná $(n-1)$ -plocha a v regulárních bodech $x \in \partial\Omega \setminus (\text{graf } g \cup \text{graf } h)$ bude zřejmě $\nu_n(x) = 0$, tedy můžeme psát

$$\int_U F(u, h(u)) - F(u, g(u)) d\lambda^{n-1}(u) = \int_{\partial\Omega} F \nu_n dS.$$

Definice 1.11. Řekneme, že $M \subset \mathbb{R}^n$ je *těleso se skoro hladkou hranicí*, jestliže M je omezená, $M = \text{int } \bar{M}$ a ∂M je zobecněná $(n-1)$ -plocha.

Příklady: $M = [0, 1]^n$, nebo $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq y \leq 1\}$ jsou tělesa se skoro hladkou hranicí.

Poznámka a značení: Je-li M těleso se skoro hladkou hranicí a $x \in \partial M$ regulární bod zobecněné plochy ∂M , pak existuje právě jeden jednotkový vnější normálový vektor $\nu_M(x)$ k M v bodě x . To je snadno vidět, pokud reprezentujeme hranici ∂M na okolí bodu x jako graf funkce h třídy C^1 $n-1$ proměnných, tedy $\partial M \cap V = \text{graf } h \cap V$ pro nějakou otevřenou množinu V ; pak $\nu_M(x) = \pm(-\nabla h(u), 1)/\sqrt{1 + \|\nabla h(u)\|^2}$, pokud $x = (h(u), u)$, a znaménko závisí na tom, jestli množina M leží pod nebo nad grafem h .

Uvedený motivační příklad je speciálním případem následující věty.

Věta 1.16 (Gauss-Ostrogradsky). *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je těleso se skoro hladkou hranicí s konečnou povrchovou mírou (tedy $\mu_{\partial M}(\partial M) < \infty$). Nechť je dána funkce $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ třídy C^1 (tím je myšleno, že F je restrikcí na M nějaké funkce třídy C^1 definované na nějaké otevřené nadmnožině tělesa M). Pak*

$$\int_M \frac{\partial F}{\partial x_i} d\lambda^n = \int_{\partial M} F \nu_M^i dS, \quad i = 1, \dots, n,$$

kde $\nu_M(x) = (\nu_M^1(x), \dots, \nu_M^n(x))$ je jednotkový vektor vnější normály k M v regulárním bodě $x \in \partial M$.

[bez důkazu]

Důsledek 1.17 (věta o divergenci). *Nechť M je jako v předchozí větě a $T : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ je vektorové pole třídy C^1 . Pak*

$$\int_{\Omega} \text{div } T d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} \langle T, \nu \rangle dS$$

kde

$$\text{div } T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_i}{\partial x_i}$$

je divergence pole T .

V případě $n = 2$ bývá věta o divergenci formulována trochu odlišně jako Greenova věta:

Důsledek 1.18 (Greenova věta). *Je-li $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jednoduchá, uzavřená a po částech hladká křivka obíhající omezenou oblast Ω v kladném smyslu a $F : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektorové pole třídy C^1 , pak*

$$\int_U \text{rot } F d\lambda^2 = \int_c (F_1 dx + F_2 dy),$$

kde

$$\text{rot } F := \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

je rotace pole F a na pravé straně je křivkový integrál druhého druhu.

Důkaz. Uzávěr $M := \overline{\Omega}$ je těleso se skoro hladkou hranicí, $\partial M = \text{im } \gamma$ je zobecněná 1-plocha konečné délky a kladná orientace znamená, že $\det(\nu_M(\gamma(t)), \gamma'(t)) > 0$ pro všechna t . Použijeme větu o divergenci pro vektorové pole $T := (F_2, -F_1)$, pak $\text{div } T = \text{rot } F$ a $\int_{\text{im } \gamma} \langle T, \nu \rangle dS = \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy$. $\square$

5. přednáška (30.10.2025)

2 Plošný integrál druhého druhu

2.1 Multivektory a diferenciální formy

Mějme vektorový prostor V dimenze n se skalárním součinem (obvykle uvažujeme $V = \mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem). Pod k -lineární formou na V rozumíme funkci

$$f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \times} \rightarrow \mathbb{R}$$

lineární v každé proměnné.

Definice 2.1. k -lineární forma $f : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ je *antisymetrická*, jestliže

$$f(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = (\operatorname{sgn} \pi) f(v_1, \dots, v_k)$$

pro všechna $v_1, \dots, v_k \in V$ a pro každou permutaci $\pi \in \Sigma(k)$ množiny $\{1, \dots, k\}$; $\operatorname{sgn} \pi$ značí znaménko permutace π . Prostor všech antisymetrických k -forem na V budeme značit symbolem $\Lambda^k(V)$. Pod 0-formou rozumíme reálné číslo, tedy $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$.

Cvičení: Je-li f antisymetrická k -forma a vektory $v_1, \dots, v_k$ lineárně závislé, pak $f(v_1, \dots, v_k) = 0$. (Návod: nejprve ukažte, že $f(v_1, \dots, v_k) = 0$, pokud existují dva různé indexy i, j , pro něž $v_i = v_j$.)

Pozn.: Je-li $(b_1, \dots, b_n)$ báze V , je každá antisymetrická forma $f \in \Lambda^k(V)$ určena hodnotami

$$f(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}), \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n.$$

Dále budeme pracovat s $V = \mathbb{R}^n$ a s kanonickou bází $(e_1, \dots, e_n)$.

Značení: Pro indexovou množinu $I \subset \{1, \dots, n\}$ o k prvcích ($|I| = k$) budeme symbolem $e_I^* \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ značit antisymetrickou k -formu splňující pro $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$

$$e_I^*(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } I = \{i_1, \dots, i_k\}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro $I = \emptyset$ klademe $e_\emptyset^* := 1$.

Tvrzení 2.1 (o bázi $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$). k -vektory e_I^* , $|I| = k$, tvoří bázi vektorového prostoru $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, tedy $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$.

Důkaz. Prvky e_I^* jsou zřejmě lineárně nezávislé (uvažujeme pouze různé množiny k indexů): skutečně, pokud $\sum_{|I|=k} \alpha_I e_I^* = 0$, pak pro každou pevnou $I_0 = \{i_1 < \dots < i_k\}$ je

$$\sum_{|I|=k} \alpha_I e_I^*(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \alpha_{I_0} = 0,$$

tedy $\alpha_I = 0$ pro každé I . Dále každou $f \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ můžeme psát ve tvaru $f = \sum_{|I|=k} \alpha_I e_I^*$ s koeficienty $\alpha_I = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$. $\square$

Připomeňme, že *direktní součet* $V \oplus W$ vektorových prostorů V, W je definován jako

$$V \oplus W := \{v + w : v \in V, w \in W\},$$

a sčítání je zde definováno po složkách, tedy sčítají se pouze prvky z V nebo prvky z W ; platí $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$.

Rovněž připomeňme, že *algebra* je vektorový prostor V , na němž je navíc definována operace násobení $\times : V \times V \rightarrow V$, která je lineární v každé komponentě (tedy bilineární).

Definice 2.2 (vnější algebra, vnější součin). *Vnější algebru nad $\mathbb{R}^n$ definujeme jako direktní součet*

$$\Lambda^*(\mathbb{R}^n) := \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(\mathbb{R}^n).$$

Zřejmě $\dim \Lambda^*(\mathbb{R}^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Pro indexové množiny $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ definujeme *vnější součin* prvků e_I^* a e_J^* jako

$$e_I^* \wedge e_J^* = \begin{cases} \text{sgn}(I, J) e_{I \cup J}^*, & \text{pokud } I \cap J = \emptyset, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\text{sgn}(I, J)$ značí znaménko permutace množiny $I \cup J$, která převádí prvních $|I|$ prvků množiny $I \cup J$ rostoucím způsobem na I a zbývajících $|J|$ prvků rostoucím způsobem na J . Zřejmě $e_I^* \wedge e_J^* \in \Lambda^{|I|+|J|}(\mathbb{R}^n)$. Vnější součin rozšíříme lineárně na celou vnější algebru $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 2.2. *Operace vnějšího součinu $\wedge$ je asociativní a distributivní vzhledem ke sčítání na $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$.*

Důkaz. Plyne přímo z definice. $\square$

Lemma 2.3. *Pro obecné prvky $f \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ a $g \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ platí $f \wedge g \in \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$ a pro libovolné vektory $v_1, \dots, v_{k+l} \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$(f \wedge g)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \Sigma(k, l)} (\text{sgn } \sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}),$$

kde $\Sigma(k, l)$ je množina všech permutací $\sigma \in \Sigma(k+l)$ takových, že $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$ a $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)$.

(Důkaz bude proveden na cvičení.)

Značení: Pro jednoprvkové indexové množiny $\{i\}$ budeme psát

$$dx_i := e_i^* := e_{\{i\}}^* \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n).$$

Zřejmě pro množinu $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ pak platí

$$e_I^* = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

a i zde budeme používat značení $dx_I := e_I^*$.

Definice 2.3 (duální prostor). Je-li V vektorový prostor dimenze n nad $\mathbb{R}$, pak symbolem $V^* := \Lambda^1(V)$ značíme prostor všech lineárních forem na V a nazýváme *duálním prostorem* k V .

Druhý duál (biduál) $V^{**} = (V^*)^*$ obvykle kanonicky ztotožňujeme s prostorem V ($V^{**} = V$) na základě následujícího kanonického izomorfismu:

$$v \in V \mapsto F_v \in V^{**}, \quad F_v : f \mapsto f(v), \quad f \in V^*.$$

Zobrazení $F : v \mapsto F_v$ je zřejmě lineární, prosté a jeho obraz je podprostor dimenze n v V^{**} , přitom $\dim V^{**} = n$, tedy nutně F je na V^{**} .

Definice 2.4 (multivektory). Pro vektorový prostor V dimenze n definujeme vektorový prostor k -vektorů jako

$$\Lambda_k(V) := \Lambda^k(V^*),$$

a příslušnou vnější algebru jako

$$\Lambda_*(V) := \Lambda^*(V^*) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda_k(V).$$

Pro $k = 1$ ztotožňujeme

$$\Lambda_1(V) = \Lambda^1(V^*) = V^{**} \cong V.$$

V případě $V = \mathbb{R}^n$ má tento prostor bázi $\{e_I = e_I^{**}, |I| = k\}$ (ztotožňujeme V^{**} s V). Prostor $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ můžeme chápat jako duál $(\Lambda_k(\mathbb{R}^n))^*$, položíme-li $e_I^*(e_J) = \delta_{I,J}$.

Značení: Je-li $\alpha \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ a $f \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, budeme psát

$$\langle \alpha, f \rangle := f(\alpha),$$

kde využíváme ztotožnění $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) = (\Lambda_k(\mathbb{R}^n))^*$ (tedy f je lineární forma na $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$). Speciálně platí pro indexové množiny I, J o k prvcích:

$$\langle e_I, e_J^* \rangle = \begin{cases} 1, & I = J, \\ 0, & I \neq J. \end{cases}$$

Pozn.: Na $\Lambda_*(\mathbb{R}^n)$ je definován vnější součin a pro vektory $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ platí $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$.

Definice 2.5. k -vektor $\alpha \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ je *jednoduchý*, jestliže existují $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\alpha = u_1 \wedge \dots \wedge u_k$.

Cvičení Ukažte, že 2-vektor $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ v $\mathbb{R}^4$ není jednoduchý.

Definice 2.6 (skalární součin). Pro indexové množiny I, J , $|I| = |J| = k$, definujeme skalární součin jako

$$e_I \cdot e_J := \begin{cases} 1 & \text{pokud } I = J, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

a rozšíříme tuto definici lineárně na $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$. Skalární součin indukuje normu $\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}$.

Cvičení:

1. Pro vektory $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ platí

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_n = \det(u_{i,j})_{i,j=1}^n (e_1 \wedge \dots \wedge e_n).$$

2. Pro $u, v \in \mathbb{R}^n$ je

$$u \wedge v = \sum_{i < j} (u_i v_j - u_j v_i) (e_i \wedge e_j).$$

3. Pro $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ platí

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{\{|I|=k\}} (\det(v_{i,j})_{i=1, j \in I}^k)^k e_I.$$

6. přednáška (6.11.2025)

Definice 2.7. Pro multivektor $\alpha \in \Lambda_*(\mathbb{R}^n)$ položíme

$$L(\alpha) := \{v \in \mathbb{R}^n : v \wedge \alpha = 0\}.$$

Tvrzení 2.4. Pro nenulový k -vektor $\alpha \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ platí:

- (i) $L(\alpha)$ je vektorový prostor dimenze nejvýše k .
- (ii) $\dim L(\alpha) = k$ právě tehdy, když je α jednoduchý.
- (iii) Jestliže $L(\alpha) = L(\beta)$ pro nějaký jednoduchý $\beta \in \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$, pak $\beta = c\alpha$ pro nějaké $c \neq 0$.

Pozn.: Z výše uvedených vlastností plyne, že normované jednoduché k -vektory reprezentují orientované k -rozměrné podprostory $\mathbb{R}^n$.

Důkaz. (i). Snadno z definice odvodíme, že $L(\alpha)$ je vektorový prostor. Zvolme $\{v_1, \dots, v_m\}$ ortonormální bázi prostoru $L(\alpha)$ (tedy $m = \dim L(\alpha)$), a doplňme ji na ortonormální bázi celého $\mathbb{R}^n$: $\{v_1, \dots, v_n\}$. Pomocí této báze můžeme definovat bázi $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ tvořenou k -vektory

$$v_I := v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}, \quad I = \{i_1 < \dots < i_k\} \subset \{1, \dots, n\}.$$

Pomocí této báze vyjádříme

$$\alpha = \sum_{|I|=k} \alpha_I v_I.$$

Pro každý index $i \leq m$ musí být $0 = v_i \wedge \alpha = \sum_{|I|=k} \alpha_I (v_i \wedge v_I)$, a tedy $\alpha_I = 0$ jakmile $i \notin I$. Nutně tedy $\alpha_I \neq 0$ pouze pro indexové množiny obsahující $\{1, \dots, m\}$, tedy $k \geq m$.

(ii). Z výše uvedeného je zřejmé, že pokud $k = m$, pak $\alpha_I \neq 0$ pouze pro $I = \{1, \dots, k\}$, a tedy α je jednoduchý. Obráceně, pokud $0 \neq \alpha = u_1 \wedge \dots \wedge u_k$ je jednoduchý, pak u_i jsou lineárně nezávislé vektory a všechny patří do $L(\alpha)$, a tedy $m \geq k$.

(iii). Výše jsme ukázali, že pro $k = m$ je každý jednoduchý k -vektor β s $L(\beta) = L(\alpha)$ násobkem $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$. $\square$

Definice 2.8 (diferenciální forma). *Diferenciální formou stupně k* rozumíme hladké (C^∞) zobrazení

$$\omega : \Omega \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$$

definované na otevřené podmnožině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Symbolem $\mathcal{E}^k(\Omega)$ značíme vektorový prostor všech diferenciálních k -forem na Ω .

Pozn.: Každou diferenciální k -formu $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ můžeme psát ve tvaru

$$\omega(x) = \sum_{|I|=k} \omega_I(x) dx_I, \quad x \in \Omega,$$

s hladkými reálnými funkcemi $\omega_I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. (Připomeňme, že $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, pokud $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$.)

Definice 2.9. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $0 \leq k \leq n$. Vnější (de Rhamův) diferenciál je zobrazení

$$d : \mathcal{E}^k(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^{k+1}(\Omega)$$

definované následovně: Pro $k = 0$ a $f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$ (f je reálná funkce) klademe

$$df(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i, \quad x \in \Omega.$$

Pro $k > 0$ a $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I dx_I$ pak

$$\begin{aligned} d\omega(x) &:= \sum_{|I|=k} (d\omega_I(x) \wedge dx_I) \\ &= \sum_{|I|=k} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}(x) (dx_i \wedge dx_I), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Příklad: Pro 1-formu $\omega(x, y) = (x^2 + y^2) dx - 2xy dy$ dostáváme

$$\begin{aligned} d\omega(x, y) &= 2x(dx \wedge dx) + 2y(dy \wedge dx) - 2y(dx \wedge dy) - 2x(dy \wedge dy) \\ &= -4y(dx \wedge dy). \end{aligned}$$

Věta 2.5 (pravidla pro vnější diferenciál). Pro $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou, $0 \leq k, l \leq n$, $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ a $\tau \in \mathcal{E}^l(\Omega)$ platí:

- (i) $d(\omega + \tau) = d\omega + d\tau$, pokud $k = l$.
- (ii) $d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau$.
- (iii) $d(d\omega) = 0$.

Důkaz. Vlastnost (i) plyne přímo z definice.

(ii) Vzhledem k linearitě vnějšího diferenciálu stačí rovnost dokázat pro případ $\omega = \omega_I dx_I$, $\tau = \tau_J dx_J$. Platí

$$\begin{aligned} d(\omega_I dx_I \wedge \tau_J dx_J) &= d(\omega_I \tau_J (dx_I \wedge dx_J)) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J + \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i} \right) (dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{i=1}^n \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i} (-1)^k dx_I \wedge dx_i \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau. \end{aligned}$$

(iii) Opět stačí uvažovat případ $\omega = \omega_I dx_I$. V případě $k = 0$ je $\omega = f \in C^\infty(\Omega)$, $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ a

$$\begin{aligned} d(df) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0, \end{aligned}$$

neboť parciální derivace druhého řádu funkce f jsou symetrické. Pro $k > 0$ pak máme

$$d(\omega_I dx_I) = d\omega_I \wedge dx_I$$

a podle pravidla (ii)

$$\begin{aligned} d^2(\omega_I dx_I) &= d(d\omega_I \wedge dx_I) \\ &= d^2\omega_I \wedge dx_I - d\omega_I \wedge d(dx_I) = 0. \end{aligned}$$

□

Definice 2.10. Diferenciální forma $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ ($k \geq 1$) je *exaktní*, pokud $\omega = d\tau$ pro nějakou $\tau \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$. Forma $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ je *uzavřená*, pokud $d\omega = 0$.

Pozn.: Podle posledního tvrzení předchozí věty je každá exaktní forma uzavřená. Pro některé oblasti Ω platí i obrácená implikace, například pro otevřenou kouli (Poincarého lemma).

Definice 2.11 (přenos diferenciální formy). Buďte $U \subset \mathbb{R}^m$ a $V \subset \mathbb{R}^n$ otevřené množiny a $\Phi : U \rightarrow V$ hladké (C^∞) zobrazení. Pro $0 \leq k \leq \min(m, n)$ definujeme zobrazení

$$\Phi^* : \mathcal{E}^k(V) \rightarrow \mathcal{E}^k(U)$$

následovně:

$$\Phi^*(\omega) := \sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \Phi) d\Phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{i_k},$$

pokud $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I dx_I$, $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ a $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)^T$.

Pozn.: Pro $k = 0$ je $\Phi^*f = f \circ \Phi$, pro $k \geq 1$ pak

$$\Phi^*(\omega) = \sum_{|I|=k} (\omega_I \circ \Phi) \left(\sum_{j_1=1}^m \frac{\partial \Phi_{i_1}}{\partial u_{j_1}} du_{j_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_k=1}^m \frac{\partial \Phi_{i_k}}{\partial u_{j_k}} du_{j_k} \right).$$

Příklad: Pro $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v)$ a $\omega = (x^2 + y^2)dx \wedge dy$ je

$$\begin{aligned}\Phi^*(\omega) &= u^2(d(u \cos v) \wedge d(u \sin v)) \\ &= u^2(\cos v du - u \sin v dv) \wedge (\sin v du + u \cos v dv) \\ &= u^3 du \wedge dv.\end{aligned}$$

Věta 2.6 (Vlastnosti přenosu dif. formy). *Nechť $\Phi : U \rightarrow V$ je třídy C^∞ , $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ otevřené množiny, $\omega \in \mathcal{E}^k(V)$, $\tau \in \mathcal{E}^l(V)$. Pak platí:*

- (i) $\Phi^*(\omega + \tau) = \Phi^*\omega + \Phi^*\tau$, pokud $k = l$,
- (ii) $\Phi^*(\omega \wedge \tau) = \Phi^*\omega \wedge \Phi^*\tau$,
- (iii) $\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*\omega)$,
- (iv) je-li $\Psi : W \rightarrow U$ třídy C^∞ , $W \subset \mathbb{R}^p$ otevřená, pak $(\Phi \circ \Psi)^*\omega = \Psi^* \circ \Phi^*(\omega)$,
- (v) pro $k = m = n$ a $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ je

$$\Phi^*\omega = J\Phi(f \circ \Phi) du_1 \wedge \dots \wedge du_n,$$

kde

$$J\Phi = \det \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} \right)_{i,j=1}^n.$$

Důkaz. (i) Plyne přímo z definice.

(ii) Stačí (vzhledem k (i)) dokázat pro případ $\omega = \omega_I dx_I$, $\tau = \tau_J dx_J$. Nechť $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ a $J = \{j_1 < \dots < j_l\}$. Pak

$$\begin{aligned}\Phi^*(\omega \wedge \tau) &= \Phi^*(\omega_I \tau_J dx_I \wedge dx_J) \\ &= (\omega_I \circ \Phi)(\tau_J \circ \Phi) d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_k} \wedge d\Phi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{j_l} \\ &= \Phi^*\omega \wedge \Phi^*\tau.\end{aligned}$$

(iii) Dokazujeme opět pro případ $\omega = \omega_I dx_I$, $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$. Podle definice je

$$\begin{aligned}\Phi^*(d\omega) &= \Phi^* \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \circ \Phi \right) d\Phi_i \wedge d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_k}, \\ d(\Phi^*\omega) &= d((\omega_I \circ \Phi) d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_k}) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\omega_I \circ \Phi)}{\partial u_j} du_j \wedge d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_k}.\end{aligned}$$

Dosazením rovností

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} du_j \quad \text{a} \quad \frac{\partial(\omega_I \circ \Phi)}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \circ \Phi \right) \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}$$

do výše uvedených vztahů dostaneme křžzenou rovnost $\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*\omega)$.

(iv) Pokud $\omega = f \in \mathcal{E}^0(V)$, pak

$$(\Phi \circ \Psi)^*\omega = f \circ (\Phi \circ \Psi) = (f \circ \Phi) \circ \Psi = \Psi^*(f \circ \Phi) = \Psi^* \circ \Phi^*(f).$$

Pokud dále $\omega = dx_i \in \mathcal{E}^1(V)$, pak

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \Psi)^*\omega &= \sum_{j=1}^p \frac{\partial(\Phi \circ \Psi)_i}{\partial y_j} dy_j = \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_l} \circ \Psi \right) \left(\sum_{j=1}^p \frac{\partial \Psi_l}{\partial y_j} dy_j \right) \\ &= \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_l} \circ \Psi \right) d\Psi_l = \Psi^* \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_l} du_l \right) = \Psi^*(\Phi^*\omega). \end{aligned}$$

Obecný případ dostaneme pomocí vlastností (i) a (ii).

(v) Pro $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ je skutečně

$$\begin{aligned} \Phi^*\omega &= (f \circ \Phi) d\Phi_1 \wedge \cdots \wedge d\Phi_n \\ &= (f \circ \Phi) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_j} du_j \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_n}{\partial u_j} du_j \right) \\ &= (f \circ \Phi) J\Phi du_1 \wedge \cdots \wedge du_n. \end{aligned}$$

□