

Domácí úkol č. 1 (G2, 2025)

Nechť $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných třídy C^1 (tedy je restrikcí C^1 funkce definované na nějaké otevřené množině). Uvažujme posloupnost triangulací čtverce $[0, 1]^2$ definovanou následovně: pro $n = 1, 2, \dots$ je $\mathcal{T}_n$ množina všech pravoúhlých trojúhelníků s vrcholy v bodech $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$, $0 \leq i, j \leq n$, s odvěsnami délky $\frac{1}{n}$ rovnoběžnými s osami x, y a s přeponami rovnoběžnými s diagonálou $\{(t, t) : 0 \leq t \leq 1\}$. Pro každý $T \in \mathcal{T}_n$ nechť $\hat{T}$ je trojúhelník s vrcholy v bodech grafu funkce f příslušných vrcholům T , tedy v bodech $(a_i, f(a_i))$, kde a_i jsou vrcholy T ($i = 1, 2, 3$). Ukažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{T \in \mathcal{T}_n} \text{area}(\hat{T}) = \int_{[0,1]^2} \sqrt{1 + \|\nabla f(u)\|^2} d\lambda^2(u).$$

Poznámka: Integrálem na pravé straně budeme definovat plošný obsah grafu funkce f . Dokazovaná rovnost říká, že příslušný integrál je roven limitě ploch aproximací po částech afinními plochami generovanými danou posloupností triangulací integračního oboru.

Návod:

1. Ukažte, že

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_n} \text{area}(\hat{T}) = \int_{[0,1]^2} f_n d\lambda^2,$$

kde

$$f_n(x, y) := \frac{\text{area}(\hat{T})}{\text{area}(T)}, \quad (x, y) \in T \in \mathcal{T}_n.$$

2. Má-li T vrcholy $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$, $(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n})$ a $(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n})$, pak pro $(x, y) \in T$ je

$$\text{area}(\hat{T}) = \text{area}(T) \sqrt{1 + n^2 \left(f\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \right)^2 + n^2 \left(f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n}\right) \right)^2}.$$

Zdůvodněte!

3. Ukažte, že $f_n(u) \Rightarrow \sqrt{1 + \|\nabla f(u)\|^2}$ na $[0, 1]^2$. Použijte Lagrangeovu větu pro funkci dvou proměnných.
4. Zaměňte limitu s integrálem pro stejnoměrně konvergentní posloupnost.