

Přednáška 5.10.2020

1 Úvod

Připomenutí: Riemannův Newtonův integrál, geometrický význam plochy pod grafem

Ne všechny funkce jsou "integrovatelné", ne všechny množiny "měřitelné"

Obecná konstrukce: nejprve míra (množinová funkce), z ní je odvozen integrál (aproximace po částech konstantními funkcemi).

Vlastnosti, které chceme po "míře":

$$(1) \mu(\emptyset) = 0, \mu(A) \geq 0 \forall A,$$

$$(2) \mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n) \text{ pro po dvou disjunktní množiny } A_1, A_2, \dots$$

Problém - které množiny jsou "měřitelné", neboli $\mathcal{D}\mu = ?$

Příklad: Neexistuje $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ splňující (1), (2) a

$$(3) \mu(I) = \text{délka}(I) \text{ pro každý interval } I,$$

$$(4) \mu(A + x) = \mu(A), A \subset \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

Důkaz: Předpokládejme pro spor, že takové zobrazení μ existuje. Uvažujme ekvivalenci na \mathbb{R}

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Množina $A \subset [0, 1]$ nechť obsahuje právě jeden prvek z každé třídy ekvivalence \sim (používáme axiom výběru!). Bud' dále $\mathbb{Q} \cap [-1, 1] = \{q_1, q_2, \dots\}$ očíslování racionálních čísel v intervalu $[-1, 1]$. Nyní platí:

$$(a) \bigcup_{i=1}^{\infty} (A + q_i) \supset [0, 1] \text{ (protože pro každý } x \in [0, 1] \text{ existuje } a \in A \text{ takové, že } x - a \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1], \text{ tedy } x - a = q_i \text{ pro nějaké } i, \text{ čili } x \in A + q_i),$$

$$(b) \bigcup_{i=1}^{\infty} (A + q_i) \subset [-1, 2],$$

$$(c) \text{ množiny } A + q_i \text{ jsou po dvou disjunktní } (i = 1, 2, \dots) \text{ (kdyby ne, pak by } A \text{ obsahovala dva ekvivalentní prvky).}$$

Z (2), (4) a (c) plyne, že $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A + q_i)) = \infty$ jakmile $\mu(A) > 0$, což by bylo v rozporu s (b). Musí tedy být $\mu(A) = 0$. Pak ale i $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A + q_i)) = 0$, což podle (a) a (3) znamená $0 > \mu([0, 1]) = 1$, tedy spor. \square

2 Prostor s mírou

Bud' X libovolná neprázdná množina. Symbolem $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ značíme potenční množinu množiny X .

Definice 2.1 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je σ -algebra na X , jestliže

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
- (ii) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$;
- (iii) $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je algebra, splňuje-li (1), (2) a

- (iii') $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$.

Pozn.: Algebra je uzavřená na konečné množinové operace (průnik, sjednocení, rozdíl), σ -algebra na spočetné množinové operace.

Příklady:

- $\{\emptyset, X\}, \mathcal{P}(X)$ jsou σ -algebry na X .
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ je σ -algebra na $X = \{1, 2, 3\}$.
- $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ konečná nebo } \mathbb{N} \setminus A \text{ konečná}\}$ je algebra na \mathbb{N} , ale není to σ -algebra.

Věta 2.1 *Bud'te $\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in I$ σ -algebry na množině X , přitom I je libovolná indexová množina. Pak $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ je σ -algebra na X .*

Důkaz: Plyne jednoduše z definice. □

Důsledek 2.2 *Pro libovolný množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ existuje nejmenší σ -algebra $\sigma\mathcal{S}$ obsahující \mathcal{S} .*

Důkaz: Položme

$$\sigma\mathcal{S} := \bigcap \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{S} \subset \mathcal{A}, \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra} \}.$$

□

Definice 2.2 *Bud' (X, ρ) metrický prostor a \mathcal{G} systém všech otevřených podmnožin X . Pak $\mathcal{B}(X) := \sigma\mathcal{G}$ nazýváme borelovskou σ -algebrou na X .*

Příklad: Následující množinové systémy spadají do borelovské σ -algebry:

- \mathcal{F} - systém uzavřených množin
- \mathcal{G}_δ - spočetné průniky otevřených množin
- \mathcal{F}_σ - spočetná sjednocení uzavřených množin
- $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ - spočetná sjednocení množin z \mathcal{G}_δ
- ...

Pozn.: Je obtížné popsat třídu borelovských množin konstruktivně (je třeba transfinitní indukce).

Pozn.: Ne všechny množiny jsou borelovské. Platí dokonce

$$\text{card } \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} = \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

tedy neborelovských podmnožin \mathbb{R} je více než borelovských.

Definice 2.3 (X, \mathcal{A}) je *měřitelný prostor*, jestliže X je neprázdná množina a \mathcal{A} je σ -algebra na X .

μ je *míra* na (X, \mathcal{A}) , jestliže $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ splňuje

- (a) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (b) $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní ($i \in \mathbb{N}$) $\implies \mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$ (σ -aditivita).

Trojici (X, \mathcal{A}, μ) nazýváme *prostor s mírou*.

Pozn.: Z vlastnosti (b) a z nezápornosti plyne monotonie míry: $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$.

Příklady:

- $\mu(A) = 0 \forall A \in \mathcal{P}(X)$ - nulová míra ($\mu = 0$)
- pro $x \in X$ pevný položíme

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 0 & x \notin A, \\ 1 & x \in A. \end{cases}$$

δ_x se nazývá *Diracova míra* v bodě x .

- Míra

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{card}(A) & A \subset X \text{ konečná,} \\ \infty & A \subset X \text{ nekonečná.} \end{cases}$$

se nazývá *aritmetická míra* na X .

Věta 2.3 (Spojitost míry) *Bud' (X, \mathcal{A}, μ) prostor s mírou, $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$.*

1. $A_1 \subset A_2 \subset \dots \implies \mu(A_i) \nearrow \mu(\bigcup_i A_i)$,
2. $\mu(A_1) < \infty$, $A_1 \supset A_2 \supset \dots \implies \mu(A_i) \searrow \mu(\bigcap_i A_i)$.

Důkaz: 1. Necht' $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \nearrow A$. Pak $A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots$ je disjunktní rozklad na měřitelné množiny, tedy $\mu(A) = \mu(A_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1})$. Zároveň $\mu(A_i) = \mu(A_1) + \sum_{j=2}^i \mu(A_j \setminus A_{j-1})$, takže $\mu(A_i) \nearrow \mu(A)$, $i \rightarrow \infty$.

2. Necht' $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \searrow A$, $\mu(A_1) < \infty$. Položme $B_i := A_1 \setminus A_i$, $i \in \mathbb{N}$. Zřejmě platí $B_i \nearrow B := A_1 \setminus A$, tedy $\mu(A_1) - \mu(A_i) = \mu(B_i) \nearrow \mu(B) = \mu(A_1) - \mu(A)$, a odečtením výrazu $\mu(A_1) < \infty$ dostaneme $\mu(A_i) \searrow \mu(A)$. \square

Definice 2.4 Bud' (X, \mathcal{A}, μ) prostor s mírou. Řekneme, že $N \subset X$ je *nulová množina*, jestliže existuje $A \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(A) = 0$ a $N \subset A$. Symbolem \mathcal{N} značíme systém všech nulových množin. dále značíme

$$\mathcal{A}_0 := \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$$

zúplněnou σ -algebru \mathcal{A} vzhledem k míře μ .

Pozn: \mathcal{N} je σ -ideál, tedy systém množin uzavřený na podmnožiny a spočetná sjednocení.

Věta 2.4 (Zúplnění míry) *Je dán prostor s mírou (X, \mathcal{A}, μ) . Pak platí:*

1. $\mathcal{A}_0 = \{B \subset X : \exists A \in \mathcal{A}, B \Delta A \in \mathcal{N}\}$ (symbolem Δ značíme symetrickou diferenci množin).
2. Míru μ lze jednoznačně rozšířit na prostor (X, \mathcal{A}_0) (značíme opět μ).
3. V prostoru (X, \mathcal{A}_0, μ) jsou všechny nulové množiny měřitelné.

Důkaz: 1. Označme $\overline{\mathcal{A}}_0 := \{B \subset X : \exists A \in \mathcal{A}, B \Delta A \in \mathcal{N}\}$. Ukážeme nejprve, že $\overline{\mathcal{A}}_0$ je σ -algebra. Zřejmě platí $\emptyset, X \in \overline{\mathcal{A}}_0$. Je-li $B \in \overline{\mathcal{A}}_0$, pak $A \Delta B \in \mathcal{N}$ pro nějakou $A \in \mathcal{A}$, a tedy také $X \setminus B \in \overline{\mathcal{A}}_0$, protože $(X \setminus B) \Delta (X \setminus A) = B \Delta A \in \mathcal{N}$ a $X \setminus A \in \mathcal{A}$. Dále, jsou-li $B_i \in \overline{\mathcal{A}}_0$, $i \in \mathbb{N}$, pak $B_i \Delta A_i \in \mathcal{N}$ pro nějaké $A_i \in \mathcal{A}$, a tedy také $\bigcup_i B_i \in \overline{\mathcal{A}}_0$, protože $(\bigcup_i B_i) \Delta (\bigcup_i A_i) \subset \bigcup_i (B_i \Delta A_i) \in \mathcal{N}$. $\overline{\mathcal{A}}_0$ je tedy σ -algebra. Pak ale ze zřejmé inkluze $\mathcal{A} \cup \mathcal{N} \subset \overline{\mathcal{A}}_0$ plyne $\mathcal{A}_0 = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}) \subset \sigma \overline{\mathcal{A}}_0 = \overline{\mathcal{A}}_0$. Opačná inkluze je snadná: je-li $B \in \overline{\mathcal{A}}_0$, pak $B \Delta A \in \mathcal{N}$ pro nějakou $A \in \mathcal{A}$, tedy $B = A \cup (B \setminus A) \setminus (A \setminus B)$, přitom $B \setminus A$ i $A \setminus B$ leží v \mathcal{N} , tedy nutně $B \in \mathcal{A}_0$.

2. Je-li $B \in \mathcal{A}_0$ a $A \in \mathcal{A}$ taková, že $B \Delta A \in \mathcal{N}$, položíme $\mu(B) := \mu(A)$. Nejprve musíme ukázat, že toto rozšíření je korektní, tedy že nezávisí na volbě A . Je-li $A' \in \mathcal{A}$ jiná množina s vlastností $B \Delta A' \in \mathcal{N}$, pak z inkluzí $A \setminus A' \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A') \in \mathcal{N}$ a $A' \setminus A \subset (A' \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{N}$ plyne $\mu(A \setminus A') = \mu(A' \setminus A) = 0$, a tedy $\mu(A) = \mu(A')$. Definice je tedy korektní. Ukážeme, že takto dodefinovaná množinová funkce μ je σ -aditivní. Bud' (B_i) posloupnost po dvou disjunktních množin z \mathcal{A}_0 , označme $B := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, a buďte $A_i \in \mathcal{A}$ takové, že $B_i \Delta A_i \in \mathcal{N}$. Položme $C_1 := A_1$, $C_i := A_i \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{i-1})$, $i = 2, 3, \dots$, $C := \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Pak (C_i) je posloupnost po dvou disjunktních množin z \mathcal{A} , tedy $\mu(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i)$. Protože množiny $C_i \Delta B_i$ a $C \Delta B$ jsou nulové, platí $\mu(B_i) = \mu(C_i)$, $i \in \mathbb{N}$, a

$\mu(B) = \mu(C)$, a tedy také $\mu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$. Tím je dokázáno, že μ je σ -aditivní na \mathcal{A}_0 , a je to tedy míra.

3. Buď $M \subset X$ nulová v (X, \mathcal{A}_0, μ) . Ukážeme, že $M \in \mathcal{N}$ (tedy že M je nulová i v původním prostoru (X, \mathcal{A}, μ)), a tedy $M \in \mathcal{A}_0$. K množině M existuje $B \in \mathcal{A}_0$, $M \subset B$, $\mu(B) = 0$. Z definice rozšířené míry μ dále existuje $A \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(A) = 0$ a $B \setminus A \in \mathcal{N}$, tedy existuje $N \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(N) = 0$ a $B \setminus A \subset N$. Pak ale $M \subset B \subset A \cup N \in \mathcal{A}$ a $\mu(A \cup N) = 0$, tedy $M \in \mathcal{N}$. \square

Definice 2.5 (i) μ je *borelovská míra* na metrickém prostoru X , je-li to míra na $(X, \mathcal{B}(X))$.

(ii) Míra μ na (X, \mathcal{A}) je *konečná*, jestliže $\mu(X) < \infty$.

(iii) Míra μ na (X, \mathcal{A}) je *σ -konečná*, jestliže existují $E_n \in \mathcal{A}$ takové, že $X = \bigcup_n E_n$ a $\mu(E_n) < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Věta 2.5 (Lebesgueova míra) *Existuje právě jedna borelovská míra λ^n na \mathbb{R}^n taková, že pro všechna $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$, platí*

$$\lambda^n([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

[Důkaz bude v navazující přednášce.]

Poznámky:

1. Lebesgueova míra je zřejmě σ -konečná.
2. Značíme \mathcal{B}_0^n zúplnění \mathcal{B}^n vzhledem k λ^n . Platí $\mathcal{B}^n \subsetneq \mathcal{B}_0^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (bez důkazu).
3. Lebesgueova míra je regulární v tomto smyslu (důkaz bude později): *Ke každé $E \in \mathcal{B}_0^n$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují G otevřená, F uzavřená, $F \subset E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon$. (Důkaz bude v navazující přednášce.)*

Přednáška 12.10.2020

3 Měřitelné funkce

Věta 3.1 Uvažujme zobrazení $f : X \rightarrow Y$.

- (i) Je-li \mathcal{B} σ -algebra na Y , pak $f^{-1}\mathcal{B} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ je σ -algebra na X .
- (ii) Pro libovolný množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ platí $\sigma(f^{-1}\mathcal{S}) = f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$.

Důkaz: (i) se snadno dokáže s využitím faktu, že vzor množiny komutuje s množinovými operacemi. Konkrétně platí $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ a $\bigcup_i f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\bigcup_i B_i)$, kdykoliv $B, B_1, B_2, \dots \subset Y$.

(ii). Zřejmě $f^{-1}\mathcal{S} \subset f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$, a tedy $\sigma(f^{-1}\mathcal{S}) \subset \sigma(f^{-1}(\sigma\mathcal{S})) = f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$, protože $f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$ je σ -algebra podle části (i). Pro důkaz opačné inkluze označme množinový systém

$$\mathcal{A} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}\mathcal{S})\}.$$

Je snadné ověřit, že \mathcal{A} je σ -algebra. Dále zřejmě $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, a tedy také $\sigma\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, tudíž $f^{-1}(\sigma\mathcal{S}) \subset f^{-1}\mathcal{A} \subset \sigma(f^{-1}\mathcal{S})$, kde poslední inkluze plyne přímo z definice systému \mathcal{A} . \square

Definice 3.1 Buďte (X, \mathcal{A}) a (Y, \mathcal{B}) měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je *měřitelné* (vzhledem k \mathcal{A}, \mathcal{B}), jestliže $f^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Píšeme pak $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$. Je-li některý z prostorů X, Y metrickým prostorem, pak za příslušnou σ -algebru bereme borelovskou σ -algebru. Měřitelné zobrazení mezi dvěma metrickými prostory nazýváme *borelovsky měřitelné* nebo stručně *borelovské*.

Pozn.:

1. Složení dvou měřitelných zobrazení je zřejmě měřitelné.
2. Jsou-li (X, \mathcal{A}) a (Y, \mathcal{B}) měřitelné prostory a $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ libovolný generátor σ -algebry \mathcal{B} (tzn. platí-li $\sigma\mathcal{S} = \mathcal{B}$), pak $f : X \rightarrow Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$. (Plyne z Věty 3.1.)
3. Je-li (X, \mathcal{A}) měřitelný prostor a Y metrický prostor, pak zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ pro každou otevřenou množinu $G \subset Y$.

Tvrzení 3.2 Každé spojitě zobrazení mezi dvěma metrickými prostory je borelovsky měřitelné.

Důkaz: Plyne přímo z předchozí poznámky a z faktu, že f je spojitě právě tehdy, když vzory otevřených množin jsou otevřené. \square

Věta 3.3 Borelovská σ -algebra $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ je generovaná

1. otevřenými kvádry (tj. množinami $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$;
2. systémem $\mathcal{S} = \{(-\infty, a_1) \times \cdots \times (-\infty, a_n) : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$.

Speciálně, $\mathcal{B}^1 = \sigma\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

Důkaz: 1. Plyne přímo z faktu, že každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako spočetné sjednocení otevřených kvádrů. Skutečně, označíme-li symbolem \mathcal{Q} systém všech otevřených kvádrů v \mathbb{R}^n s racionálními krajními body, pak lze psát

$$G = \bigcup \{I \in \mathcal{Q} : I \subset G\}.$$

K ověření vlastnosti 2. stačí ukázat, že každý otevřený kvádr leží v $\sigma\mathcal{S}$. Ověříme tuto vlastnost v \mathbb{R}^2 (případ obecné dimenze je zcela analogický). Pro otevřený kvádr $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ můžeme psát

$$I = ((-\infty, b_1) \times (-\infty, b_2)) \setminus ((-\infty, a_1] \times (-\infty, b_2)) \setminus ((-\infty, b_1) \times (-\infty, a_2]),$$

přítom

$$(-\infty, a_1] \times (-\infty, b_2) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (-\infty, a_1 + k^{-1}) \times (-\infty, b_2) \in \sigma\mathcal{S},$$

a analogicky pro $(-\infty, b_1) \times (-\infty, a_2]$. \square

Pozn.: Jako generátor \mathcal{B}^n lze vzít rovněž uzavřené či polouzavřené kvádry. Navíc stačí vzít pouze kvádry s racionálními koncovými body.

Věta 3.4 1. Jsou-li $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}^m$ měřitelná zobrazení, pak i $(f, g) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ je měřitelné.

2. Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ měřitelná, jsou i $f + g$ a $f - g$ měřitelná.

3. Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelné funkce, jsou i $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ měřitelné.

Důkaz: 1. Každý otevřený kvádr $I \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je tvaru $I = U \times V$, kde $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené kvádry. Pak platí

$$(f, g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \in \mathcal{A},$$

a tedy (f, g) je měřitelné podle Věty 3.3.

2. Měřitelnost $f + g$ plyne z toho, že součet funkcí můžeme psát jako složení

$$f + g = + \circ (f, g),$$

kde $+: (x, y) \mapsto x + y$ je operace sčítání v \mathbb{R}^n a $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$ je spojení zobrazení z prvního tvrzení. Měřitelnost složení pak plyne z měřitelnosti obou komponent. Měřitelnost zbývajících zobrazení (funkcí) se ukáže analogicky. \square

Důsledek 3.5 *Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelné funkce, pak leží množiny $\{f \leq g\}$, $\{f < g\}$ a $\{f = g\}$ v σ -algebře \mathcal{A} .*

Budeme značit $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $\mathcal{B}^* := \sigma(\mathcal{B}^1 \cup \{-\infty\}, \{\infty\})$. \mathcal{B}^* je rovněž generována intervaly a předchozí tvrzení pro reálné měřitelné funkce platí i pro “numerické” měřitelné funkce s hodnotami v \mathbb{R}^* .

Věta 3.6 *Bud'te $f_n : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ měřitelné, $n \in \mathbb{N}$. Pak jsou funkce $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ a $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ rovněž měřitelné.*

Důkaz: Označme $g := \sup_n f_n$. Pak pro libovolné $b \in \mathbb{R}^*$ platí

$$g^{-1}([-\infty, b]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq b\} \in \mathcal{A},$$

tedy g je měřitelná, neboť intervaly $[-\infty, b]: b \in \mathbb{R}^*$ generují \mathcal{B}^* . Dále označme $h := \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$. Pak pro libovolné $b \in \mathbb{R}^*$ platí

$$\begin{aligned} h^{-1}([-\infty, b]) &= \{x \in X : (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) : f_n(x) \leq b + \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \{f_n \leq b + \frac{1}{k}\} \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

tedy i h je měřitelná. Případ infima a liminf je analogický. \square

Pozn.: Z předchozí věty plyne, že limita měřitelných funkcí je měřitelná, pokud existuje.

Definice 3.2 Funkce $s : X \rightarrow [0, \infty)$ je *jednoduchá*, jestliže $s(X)$ je konečná množina.

Věta 3.7 *Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow [0, \infty]$ měřitelná, existují funkce $s_n : (X, \mathcal{A}) \rightarrow [0, \infty)$ jednoduché měřitelné takové, že $s_n \nearrow f$ ($n \rightarrow \infty$).*

Důkaz: Položme

$$s_n(x) := \max \left\{ \frac{k}{2^n} : \frac{k}{2^n} \leq f(x), k = 0, 1, \dots, n2^n \right\}, \quad x \in X.$$

Není těžké ověřit, že s_n jsou jednoduché měřitelné funkce a že $s_n \nearrow f$. \square

Přednáška 19.10.2020

4 Abstraktní Lebesgueův integrál

Pro podmnožinu $E \subset X$ značíme symbolem χ_E *indikátorovou funkci* množiny E , tedy

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Definice 4.1 Bud' (X, \mathcal{A}, μ) prostor s mírou.

- (a) Je-li $s : (X, \mathcal{A}) \rightarrow [0, \infty)$ jednoduchá měřitelná v *kanonickém tvaru* $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{E_j}$ (tedy $\alpha_j \geq 0$, $E_j = \{x \in X : s(x) = \alpha_j\} \in \mathcal{A}$), klademe

$$\int_X s \, d\mu = \int_X s(x) \, d\mu(x) := \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(E_j).$$

(Je-li některé $\alpha_j = 0$, klademe $\alpha_j \mu(E_j) = 0$, tedy používáme konvenci $0 \cdot \infty = 0$.)

- (b) Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow [0, \infty]$ měřitelná, klademe

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X s \, d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ jedn. měř.} \right\}.$$

- (c) Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ měřitelná, klademe

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu,$$

má-li rozdíl smysl. (Zde f^+ , f^- značí kladnou, resp. zápornou část funkce f .)

Pozn.:

1. Je-li f měřitelná a $E \in \mathcal{A}$, značíme

$$\int_E f \, d\mu := \int_X (f \cdot \chi_E) \, d\mu.$$

Místo $\int_X f \, d\mu$ píšeme také pouze $\int f \, d\mu$.

2. Je-li f měřitelná taková, že $\int f^+ \, d\mu = \int f^- \, d\mu = \infty$, pak $\int f \, d\mu$ není definován. Říkáme proto, že (abstraktní) Lebesgueův integrál je *absolutně konvergentní* (na rozdíl od Newtonova integrálu).

Tvrzení 4.1 (Monotonie integrálu) Pro $f, g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ měřitelné s vlastností $0 \leq f \leq g$ platí $0 \leq \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.

Věta 4.2 (Leviho věta) Jsou-li f_n nezáporné měřitelné funkce na X takové, že $f_n \nearrow f$, platí $\int_X f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$ ($n \rightarrow \infty$).

Důkaz: Označme $a_n := \int f_n d\mu \in [0, \infty]$, $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (posloupnost (a_n) je neklesající podle předchozího tvrzení). Zřejmě platí nerovnost $a \leq \int f d\mu$. Ukážeme, že také $a \geq \int f d\mu$.

Je-li $a = \infty$, nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy dále, že $a < \infty$. Ukážeme, že $a \geq \int s d\mu$ pro každou jednoduchou měřitelnou funkci $s \leq f$. Pak bude i $a \geq \int f d\mu$ podle definice integrálu.

Bud' tedy $0 \leq s \leq f$ jednoduchá měřitelná funkce. Zvolme $0 < \tau < 1$ a označme

$$E_n := \{x \in X : f_n(x) \geq \tau s(x)\}.$$

Zřejmě $E_n \in \mathcal{A}$, $E_n \subset E_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, a $\bigcup_n E_n = X$. Podle věty o spojitosti míry platí

$$\mu(A \cap E_n) \nearrow \mu(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Zapišme s ve tvaru $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$, kde $X = A_1 \cup \dots \cup A_k$ je rozklad prostoru X . Pak platí

$$\begin{aligned} \int_X f_n d\mu &\geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \int_{E_n} (\tau s) d\mu = \int (\tau s \chi_{E_n}) d\mu \\ &= \tau \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(A_j \cap E_n) \rightarrow \tau \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(A_j) = \tau \int s d\mu, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

a tedy

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \tau \int s d\mu.$$

Protože nerovnost platí pro libovolné $\tau \in (0, 1)$, platí i $a \geq \int s d\mu$, a důkaz je hotov. \square

Věta 4.3 (Fatouovo lemma) Pro funkce f_n nezáporné měřitelné na X platí

$$\int_X \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Důkaz: Označme $g_n(x) := \inf\{f_k(x) : k \geq n\}$, $x \in X$. Funkce g_n jsou měřitelné (Věta 3.6) a platí $g_n \nearrow g := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ (z definice \liminf). Podle Leviho věty platí $\int g_n d\mu \nearrow \int g d\mu$. Dále zřejmě $g_n \leq f_n$, a tedy $\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu$, $n \in \mathbb{N}$, a limitním přechodem dostaneme $\int g d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$. \square

Definice 4.2 Označme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*(\mu) &:= \left\{ f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}^* \text{ měř. : } \int f d\mu \text{ je definován} \right\}, \\ \mathcal{L}^1(\mu) &:= \left\{ f \in \mathcal{L}^*(\mu) : \int |f| d\mu < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Věta 4.4 (Linearita integrálu) Jsou-li funkce $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak platí

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu, \quad \int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu,$$

má-li pravá strana smysl.

Pozn.:

1. Zobecněný Lebesgueův integrál je tedy lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{L}^1(\mu)$.
2. Z předpokladu existence $\int f d\mu + \int g d\mu$ plyne, že nemůže nastat, aby jedna z funkcí nabývala hodnoty ∞ a druhá hodnoty $-\infty$ na množině kladné míry. Součet $f + g$ je tedy definován skoro všude.

Důkaz: (i) Je-li $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ pak i $\alpha f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\int (\alpha f) d\mu = \alpha \int f d\mu$ (cvičení).

(ii) Buďte f, g nezáporné jednoduché měřitelné, v kanonickém vyjádření $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{E_i}$, $g = \sum_{j=1}^l \beta_j \chi_{F_j}$. Pak jejich součet můžeme zapsat jako

$$f + g = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (\alpha_i + \beta_j) \chi_{E_i \cap F_j},$$

což je zřejmě opět jednoduchá měřitelná funkce. Její vyjádření výše nemusí být kanonický tvar, ale sloučíme-li dvojice indexů (i, j) , pro něž je $\alpha_i + \beta_j$ stejné, dostaneme kanonický tvar, a zřejmě podle definice je tedy

$$\int (f + g) d\mu = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (\alpha_i + \beta_j) \mu(E_i \cap F_j).$$

Z aditivity míry dostaneme $\mu(E_i) = \sum_{j=1}^l \mu(E_i \cap F_j)$, $i = 1, \dots, k$, a podobně $\mu(F_j) = \sum_{i=1}^k \mu(E_i \cap F_j)$, $j = 1, \dots, l$, a proto také podle definice

$$\int f d\mu + \int g d\mu = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (\alpha_i + \beta_j) \mu(E_i \cap F_j) = \int (f + g) d\mu.$$

(iii) Jsou-li f, g nezáporné měřitelné, pak podle Věty 3.7 existují jednoduché měřitelné funkce s_n, t_n takové, že $s_n \nearrow f$ a $t_n \nearrow g$, tedy $\int s_n d\mu \nearrow \int f d\mu$ a $\int t_n d\mu \nearrow \int g d\mu$ podle Leviho věty. Ze stejného důvodu platí i $\int (s_n + t_n) d\mu \nearrow \int (f + g) d\mu$. Víme již, že $\int (s_n + t_n) d\mu = \int s_n d\mu + \int t_n d\mu$, a limitním přechodem ($n \rightarrow \infty$) dostaneme požadovanou rovnost.

(iv) Buďte nyní $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ libovolné. Platí

$$f + g = (f + g)^+ - (f + g)^- = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-),$$

tedy $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. Všechny zde vystupující funkce jsou nezáporné, tudíž platí

$$\int (f+g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int (f+g)^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu.$$

Aby měl součet integrálů $\int f d\mu + \int g d\mu$ smysl, musí být buď $\int f^+ d\mu < \infty$ a $\int g^+ d\mu < \infty$, nebo $\int f^- d\mu < \infty$ a $\int g^- d\mu < \infty$. Uvažujme druhou z uvedených variant. Pak z nerovnosti $(f+g)^- \leq f^- + g^-$ plyne $\int (f^- + g^-) d\mu < \infty$ a odečtením všech integrálů ze záporných částí ve výše uvedené rovnosti dostaneme požadovaný vztah $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$. V případě platnosti první varianty odečteme naopak integrály z kladných částí. \square

Důsledek 4.5 *Pro nezáporné měřitelné funkce f_n na X platí*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Důkaz: Podle předchozí věty (a poznámky) platí

$$\int \left(\sum_{k=1}^n f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^n \int f_k d\mu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Limitním přechodem a s využitím Leviho věty dostaneme tvrzení. \square

Tvrzení 4.6 $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \implies \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$.

Důkaz: Podle trojúhelníkové nerovnosti a definice integrálu platí

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu.$$

\square

Cvičení:

1. $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu) \implies \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
2. Je-li funkce f měřitelná a $|f| \leq g$ pro nějakou funkci $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak i $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Věta 4.7 (Zobecněná Leviho věta) *Bud'te funkce f_n měřitelné na X ($n \in \mathbb{N}$) takové, že $f_n \nearrow f$ a $\int f_1 d\mu > -\infty$. Pak $\int f_n d\mu \nearrow \int f d\mu$.*

Důkaz: Je-li $\int f_1 d\mu = \infty$, tvrzení zřejmě platí. Necht' tedy $\int f_1 d\mu \in \mathbb{R}$. Protože $0 \leq f_n - f_1 \nearrow f - f_1$, podle Leviho věty platí $\int (f_n - f_1) d\mu \nearrow \int (f - f_1) d\mu$, a z aditivita integrálu dostaneme $\int f_n d\mu \nearrow \int f d\mu$. \square

Důsledek 4.8 Jsou-li funkce f_n měřitelné, $f_n \searrow f$ a $\int f_1 d\mu < \infty$, pak $\int f_n d\mu \searrow \int f d\mu$.

Definice 4.3 Bud' (X, \mathcal{A}, μ) prostor s mírou. Řekneme, že vlastnost $V(x)$ mají (μ) -skoro všechny body $x \in X$ (zkráceně s.v.), jestliže $\{x \in X : \neg V(x)\}$ je (μ) -nulová množina.

Tvrzení 4.9 Necht' f, g jsou měřitelné funkce na X takové, že $f = g$ s.v. Pak platí

$$\int f d\mu = \int g d\mu, \text{ má-li jedna strana smysl.}$$

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že f i g jsou nezáporné funkce. Je-li $s \leq f$ libovolná měřitelná jednoduchá funkce, pak $s' := s\chi_{\{f=g\}}$ je rovněž jednoduchá měřitelná a splňuje $s' \leq g$ a $\int s d\mu = \int s' d\mu$. Musí tedy být $\int f d\mu \leq \int g d\mu$. Obrácená nerovnost plyne ze symetrie. Bez předpokladu nezápornosti ukážeme rovnost integrálu z kladných a záporných částí (platí totiž zřejmě také $f^+ = g^+$ s.v. a $f^- = g^-$ s.v.). \square

Pozn.:

1. Pro účely integrálu stačí, aby funkce byla definována skoro všude.
2. Necht' je prostor (X, \mathcal{A}, μ) úplný. Pak z rovnosti $f = g$ s.v. plyne

$$f \text{ je měřitelná} \iff g \text{ je měřitelná.}$$

3. Při zúplnění prostoru s mírou se integrály definované v původním prostoru nemění.

Věta 4.10 (Lebesgueova; o konvergentní majorantě) Bud' (X, \mathcal{A}, μ) prostor s mírou a f_n, f měřitelné funkce takové, že $f_n \rightarrow f$ s.v. Necht' dále existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f_n| \leq g$ s.v. pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

Důkaz: Předefinujeme-li funkce f_n, f na množině

$$\{x : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : |f_n(x)| > g(x)\}$$

nulové míry, budou předpoklady věty platit pro všechna $x \in X$. Označme

$$g_n := \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, \quad h_n := \sup\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě platí

$$-g \leq g_n \leq f_n \leq h_n \leq g, \quad n \in \mathbb{N},$$

tedy $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, a $g_n \nearrow f$, $h_n \searrow f$, $n \rightarrow \infty$, tedy podle zobecněné Leviho věty platí $\int g_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$ a $\int h_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$. Protože $\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu \leq \int h_n d\mu$, platí také $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$ podle věty o dvou strážnících. \square

Důsledek 4.11 *Jsou-li f_i měřitelné, $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ konverguje s.v., a $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|\sum_{i=1}^n f_i| \leq g$ s.v. pro všechna n , pak $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a*

$$\int \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i \right) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i d\mu.$$

Přednáška 26.10.2020

5 Integrované závislé na parametru

V následujícím textu budeme pracovat s funkcemi $f : T \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Symbolem $f(\cdot, x)$ a $f(t, \cdot)$ budeme rozumět vždy funkci jedné proměnné (znázorněné tečkou) při pevné hodnotě (parametru) druhé proměnné.

Věta 5.1 (Lebesgueova; o spojitě závislosti integrálu na parametru) *Bud'te (X, \mathcal{A}, μ) prostor s mírou, T metrický prostor a $f : T \times X \rightarrow \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

- (i) $f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in T$,
- (ii) $f(\cdot, x)$ je spojitá na T pro s.v. $x \in X$,
- (iii) existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f(t, \cdot)| \leq g$ s.v. pro všechna $t \in T$.

Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in T$ a funkce

$$F : t \mapsto \int f(t, x) d\mu(x)$$

je spojitá na T .

Důkaz: Z předpokladu $|f(t, \cdot)| \leq g$ s.v. zřejmě plyne $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $t \in T$. Označme $N \subset X$ množinu nulové míry takovou, že $f(\cdot, x)$ je spojitá na T pro všechna $x \in X \setminus N$. Zvolíme-li libovolnou posloupnost $t_j \rightarrow t$ v T a libovolný $x \in X \setminus N$, platí podle Heineho věty $\lim_{j \rightarrow \infty} f(t_j, x) = f(t, x)$. Podle Lebesgueovy věty (o konvergentní majorantě) platí $\lim_{j \rightarrow \infty} F(t_j) = F(t)$. Toto platí pro každou posloupnost $t_j \rightarrow t \in T$, a tedy F je spojitá na T , opět podle Heineho věty. \square

Věta 5.2 (Záměna integrálu a derivace) *Bud'te (X, \mathcal{A}, μ) prostor s mírou, $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval a $f : I \times X \rightarrow \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

- (i) $f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in I$,
- (ii) existuje $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$, taková, že pro všechna $x \in X \setminus N$ a pro všechna $t \in I$ existuje vlastní derivace $\frac{d}{dt} f(t, x)$,
- (iii) existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že pro všechna $t \in I$, $|\frac{d}{dt} f(t, x)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in X$,
- (iv) existuje $t_0 \in I$ takové, že $f(t_0, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in I$, funkce

$$F : t \mapsto \int f(t, x) d\mu(x)$$

je diferencovatelná na I a platí

$$F'(t) = \int \frac{d}{dt} f(t, x) d\mu(x), \quad t \in I.$$

Důkaz: Pro libovolné $a, b \in I$, $a < b$, a $x \in X \setminus N$ existuje podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě $c_x \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f(b, x) - f(a, x)}{b - a} = \frac{d}{dt} f(c_x, x).$$

Z předpokladu (iii) plyne, že funkce $x \mapsto \frac{d}{dt} f(c_x, x)$ leží v prostoru $\mathcal{L}^1(\mu)$. Zvolíme-li za jeden z bodů a, b bod t_0 , dostaneme $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in I$. Uvažujme nyní libovolnou posloupnost $t_j \rightarrow t \in I$, $I \ni t_j \neq t$. Platí

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F(t_j) - F(t)}{t_j - t} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \frac{f(t_j, x) - f(t, x)}{t_j - t} d\mu(x) = \int \frac{d}{dt} f(t, x) d\mu(x);$$

poslední rovnost plyne z Lebesgueovy věty o konvergentní majorantě a z definice derivace. Protože uvedená rovnost platí pro libovolnou posloupnost $t_j \rightarrow t \in I$, $t_j \neq t$, dostáváme $F'(t) = \int \frac{d}{dt} f(t, x) d\mu(x)$, $t \in I$. \square

6 Lebesgueova míra na přímce

Věta 6.1 *Je-li $f \geq 0$ měřitelná funkce na prostoru s mírou (X, \mathcal{A}, μ) a platí-li $\int f d\mu = 0$, je $f = 0$ s.v.*

Důkaz: Označme $A_n := \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Zřejmě $A_n \in \mathcal{A}$, $\chi_{A_n} \leq nf$, a tedy $\mu(A_n) = \int \chi_{A_n} d\mu \leq n \int f d\mu = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Protože $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, platí $\mu(\{f > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$. \square

Důsledek: Jsou-li $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f \leq g$ a $\int f d\mu = \int g d\mu$, pak $f = g$ s.v.

Důsledek 6.2 *Nechť pro funkci $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ platí $\int_E f d\mu = 0$ pro každou množinu $E \in \mathcal{A}$. Pak $f = 0$ s.v.*

Důkaz: Zvolme nejprve $E_+ := \{f > 0\}$. Pak podle předpokladu platí $\int f^+ d\mu = \int_{E_+} f d\mu = 0$, a protože $f^+ \geq 0$, je $f^+ = 0$ s.v. podle Věty 6.1. Podobně volbou $E_- := \{f < 0\}$ odvodíme, že $f^- = 0$ s.v. Pak ale musí být $f = 0$ s.v. \square

Značení: Budeme uvažovat restrikcí (zúplněné) Lebesgueovy míry λ^1 na omezený otevřený interval (a, b) . Budeme značit $\mathcal{L}^1(a, b)$ příslušný prostor integrovatelných funkcí a $\int_a^b f d\lambda^1$ Lebesgueův integrál z funkce $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$. Dále symbolem $\mathcal{R}[a, b]$ značíme množinu všech omezených funkcí na $[a, b]$, pro něž existuje Riemannův integrál $(R) \int_a^b f$.

Věta 6.3 (Vztah Lebesgueova a Riemannova integrálu) *Je-li $f \in \mathcal{R}[a, b]$, pak $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$ a $(R) \int_a^b f = \int_a^b f d\lambda^1$.*

Důkaz: Protože $f \in \mathcal{R}[a, b]$, existuje posloupnost (\mathcal{D}_n) zjemňujících se dělení intervalu $[a, b]$ taková, že

$$\mathfrak{s}(f, \mathcal{D}_n) \nearrow (\mathbb{R}) \int_a^b f \searrow \mathcal{S}(f, \mathcal{D}_n), \quad n \rightarrow \infty$$

($\mathfrak{s}(f, \mathcal{D}_n)$ a $\mathcal{S}(f, \mathcal{D}_n)$ značí dolní a horní Riemannův součet f přes dělení \mathcal{D}_n). Je-li $\mathcal{D}_n = \{a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{k_n}^{(n)} = b\}$, zavedme funkce s_n, S_n předpisem

$$s_n(x) = \inf_{[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]} f, \quad S_n(x) = \sup_{[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]} f, \quad x \in (x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}], \quad i = 1, \dots, k_n,$$

a $s_n(x) = S_n(x) = 0$ pro ostatní hodnoty $x \in \mathbb{R}$. Pak zřejmě platí

$$\mathfrak{s}(f, \mathcal{D}_n) = \int_a^b s_n d\lambda^1, \quad \mathcal{S}(f, \mathcal{D}_n) = \int_a^b S_n d\lambda^1.$$

Funkce f je dle předpokladu omezená, tedy $|f| \leq M$ pro nějaké $M \in \mathbb{R}$. Platí

$$-M \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq S_2 \leq S_1 \leq M.$$

Označme $f_1 := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, $f_2 := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ (monotónní omezená posloupnost vždy konverguje). Pak platí

$$-M \leq s_n \nearrow f_1 \leq f \leq f_2 \searrow S_n \leq M.$$

a podle zobecněné Leviho věty tedy

$$\int_a^b s_n d\lambda^1 \rightarrow \int_a^b f_1 d\lambda^1, \quad \int_a^b S_n d\lambda^1 \rightarrow \int_a^b f_2 d\lambda^1.$$

Podle předpokladu ale také

$$\int_a^b s_n d\lambda^1 = \mathfrak{s}(f, \mathcal{D}_n) \nearrow (\mathbb{R}) \int_a^b f \searrow \mathcal{S}(f, \mathcal{D}_n) = \int_a^b S_n d\lambda^1,$$

takže $\int_a^b f_1 d\lambda^1 = \int_a^b f_2 d\lambda^1 = (\mathbb{R}) \int_a^b f$. Podle důsledku Věty 6.1 je $f_1 = f_2$ s.v., a zřejmě tedy také $f = f_1$ s.v. (neboť $f_1 \leq f \leq f_2$), a tedy také $\int_a^b f d\lambda^1 = (\mathbb{R}) \int_a^b f$. Měřitelnost f plyne z měřitelnosti $f_1 = \lim s_n$ a z úplnosti prostoru s mírou. \square

Věta 6.4 *Bud' $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ omezená. Pak*

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff f \text{ je spojitá } \lambda^1\text{-s.v. na } [a, b].$$

[Bez důkazu; bude v navazující přednášce]

Uvažujme nyní obecný otevřený podinterval $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Je-li $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, symbolem (N) $\int_a^b f$ značíme *Newtonův* integrál z funkce f (pokud konverguje, tedy existuje konečný):

$$(N) \int_a^b f = F(b_-) - F(a_+)$$

Věta 6.5 (Vztah Lebesgueova a Newtonova integrálu) *Nechť f je nezáporná spojitá funkce na intervalu (a, b) . Potom $(\mathbb{N}) \int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když $\int_a^b f d\lambda^1$ konverguje.*

Důkaz: Uvažujme monotónní posloupnosti $a_i \searrow a$, $b_i \nearrow b$, $i \rightarrow \infty$, $a < a_i < b_i < b$. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b) . Pak pro každé $i \in \mathbb{N}$,

$$(\mathbb{N}) \int_{a_i}^{b_i} f = F(b_i) - F(a_i) = (\mathbb{R}) \int_{a_i}^{b_i} f = \int_{a_i}^{b_i} f d\lambda^1$$

podle definice Newtonova integrálu, rovnosti Riemannova a Newtonova integrálu a Věty 6.3. Podle Leviho věty platí

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{a_i}^{b_i} f d\lambda^1 = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b (f \cdot \chi_{(a_i, b_i)}) d\lambda^1 = \int_a^b f d\lambda^1.$$

Zároveň z definice Newtonova integrálu je

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (\mathbb{N}) \int_{a_i}^{b_i} f = (\mathbb{N}) \int_a^b f,$$

právě tehdy, když posledně uvedený Newtonův integrál konverguje. Tím je ekvivalence dokázána. \square

Důsledek 6.6 *Bud' f spojitá funkce na intervalu (a, b) .*

1. *Jestliže konverguje $\int_a^b f d\lambda^1$, konverguje i $(\mathbb{N}) \int_a^b f$, a to absolutně.*
2. *Jestliže $(\mathbb{N}) \int_a^b f$ konverguje absolutně, pak konverguje i $\int_a^b f d\lambda^1$.*
3. *Pokud konverguje jak Lebesgueův, tak Newtonův integrál z funkce f , pak oba mají stejnou hodnotu.*
4. *Jestliže $(\mathbb{N}) \int_a^b f$ konverguje neabsolutně, pak $\int_a^b f d\lambda^1$ nemá smysl.*

Přednáška 2.11.2020

7 Věta o jednoznačnosti míry

Definice 7.1 Řekneme, že $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ je *Dynkinův systém*, jestliže

- (i) $X \in \mathcal{D}$,
- (ii) $D \in \mathcal{D} \implies X \setminus D \in \mathcal{D}$,
- (iii) $D_n \in \mathcal{D}$, D_n po dvou disjunktní $\implies \bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$.

Pozn.:

1. Dynkinův systém je uzavřen i na vlastní množinové rozdíly: Jsou-li $A, B \in \mathcal{D}$, $A \subset B$, pak i $B \setminus A \in \mathcal{D}$.
2. Každá σ -algebra je zřejmě Dynkinův systém, ale ne naopak.

Tvrzení 7.1 (a) *Průnik libovolného systému Dynkinových systémů je opět Dynkinův systém.*

- (b) *Pro každý množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ existuje nejmenší Dynkinův systém, obsahující \mathcal{S} :*

$$\delta\mathcal{S} := \bigcap \{ \mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X) \text{ Dynkinův syst.}, \mathcal{S} \subset \mathcal{D} \}.$$

Věta 7.2 *Nechť je množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ uzavřen na konečné průniky. Pak $\delta\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$.*

Důkaz: Ukážeme, že $\delta\mathcal{S}$ je uzavřen na konečné průniky. Z toho již vplyne, že $\delta\mathcal{S}$ je σ -algebra, a tedy $\delta\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$. (Skutečně, není těžké ověřit, že každý Dynkinův systém, který je uzavřený na konečné průniky, již je σ -algebrou.)

Položme

$$\mathcal{D} := \{ D \in \delta\mathcal{S} : D \cap S \in \delta\mathcal{S} \text{ pro každou } S \in \mathcal{S} \}.$$

Z předpokladu věty víme, že $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$. Ukážeme, že \mathcal{D} je Dynkinův systém. (i) Zřejmě $X \in \mathcal{D}$. (ii) Je-li $D \in \mathcal{D}$ a $S \in \mathcal{S}$, pak

$$(X \setminus D) \cap S = S \setminus (S \cap D) \in \delta\mathcal{S},$$

tedy $X \setminus D \in \mathcal{D}$. (iii) Jsou-li $D_n \in \mathcal{D}$ po dvou disjunktní a $S \in \mathcal{S}$, pak

$$\left(\bigcup_n D_n \right) \cap S = \bigcup_n (D_n \cap S) \in \delta\mathcal{S},$$

tedy $\bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$. \mathcal{D} je tedy Dynkinův systém a musí se tudíž shodovat se $\delta\mathcal{S}$.

Dále položíme

$$\mathcal{E} := \{E \in \delta\mathcal{S} : E \cap D \in \delta\mathcal{S} \text{ pro každou } D \in \delta\mathcal{S}\}.$$

Z dokázané rovnosti $\mathcal{D} = \delta\mathcal{S}$ plyne $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$. \mathcal{E} je rovněž Dynkinův systém (to se dokáže stejně, jako pro systém \mathcal{D}). Platí tedy také $\mathcal{E} = \delta\mathcal{S}$, což znamená, že $\delta\mathcal{S}$ je uzavřen na konečné průniky, a důkaz je hotov. \square

Věta 7.3 (Věta o jednoznačnosti míry) *Nechť je množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ uzavřen na konečné průniky a μ, ν nechť jsou dvě míry na $\sigma\mathcal{S}$ takové, že $\mu(S) = \nu(S)$ pro každou $S \in \mathcal{S}$. Nechť dále existují množiny $A_n \in \mathcal{S}$ ($n \in \mathbb{N}$) takové, že $A_n \nearrow X$ a $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\mu = \nu$ na $\sigma\mathcal{S}$.*

Důkaz: (1) Předpokládejme, nejprve, že μ je konečná. Množina

$$\mathcal{D} := \{A \in \sigma\mathcal{S} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

je Dynkinův systém (vlastnost (i) plyne z $\mu(X) = \lim_n \mu(A_n) = \lim_n \nu(A_n) = \nu(X)$, vlastnosti (ii) a (iii) pak ze (spočtené) aditivity míry). Protože $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ podle předpokladu, musí být $\mathcal{D} = \delta\mathcal{S}$. Podle Věty 7.2 je ovšem $\delta\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$, a tedy μ a ν se shodují na $\sigma\mathcal{S}$.

(2) Je-li μ nekonečná, položíme

$$\mathcal{D}_n := \{A \in \sigma\mathcal{S} : \mu(A \cap A_n) = \nu(A \cap A_n)\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Stejně jako v části (1) se ověří, že \mathcal{D}_n je Dynkinův systém obsahující \mathcal{S} , a tedy $\mathcal{D}_n = \sigma\mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$. Ze spojitosti míry pak pro libovolnou $A \in \sigma\mathcal{S}$ dostaneme

$$\mu(A) = \lim_n \mu(A \cap A_n) = \lim_n \nu(A \cap A_n) = \nu(A),$$

čímž je důkaz ukončen. \square

Příklad: Je-li μ míra na $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ taková, že $\mu(I) = \text{délka}(I)$ pro každý omezený interval I , pak nutně $\mu = \lambda^1$.

8 Součin měr a Fubiniova věta

Mějme dva prostory (X, \mathcal{A}, μ) , (Y, \mathcal{B}, ν) se σ -konečnými měrami.

Definice 8.1 *Měřitelným obdélníkem* rozumíme množinu $A \times B \subset X \times Y$, kde $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$. σ -algebru

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

nazýváme *součinnovou σ -algebrou* na prostoru $X \times Y$.

Pro množinu $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ značíme

$$\begin{aligned} E_x &:= \{y \in Y : (x, y) \in E\}, & x \in X, \\ E^y &:= \{x \in X : (x, y) \in E\}, & y \in Y \end{aligned}$$

řezy množiny E .

Tvrzení 8.1 *Nechť $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Pak*

1. $E_x \in \mathcal{B}$ pro všechna $x \in X$,
2. funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ je měřitelná na (X, \mathcal{A}) .

Důkaz: 1. Pro libovolné $x \in X$ je $\{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : E_x \in \mathcal{B}\}$ zřejmě σ -algebra obsahující všechny měřitelné obdélníky, tedy musí splývat se součinnou σ -algebrou.

2. Zvolme pevně libovolnou množinu $B_0 \in \mathcal{B}$ s mírou $\nu(B_0) < \infty$. Označme

$$\mathcal{D} := \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : x \mapsto \nu(E_x \cap B_0) \text{ je měřitelná}\}.$$

Zřejmě \mathcal{D} obsahuje všechny měřitelné obdélníky, a snadno se ověří, že \mathcal{D} je Dynkinův systém. \mathcal{D} tedy obsahuje δ -obal všech měřitelných obdélníků, a protože měřitelné obdélníky jsou uzavřené na konečné průniky, jejich δ -obal je totožný se σ -obalem, a tedy $\mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Protože ν je σ -konečná, existují množiny $B_n \in \mathcal{B}$, $\nu(B_n) < \infty$, $B_n \nearrow Y$, $n \rightarrow \infty$. Pak pro libovolnou $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ platí $\nu(E_x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(E_x \cap B_n)$, a tedy funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ je měřitelná (jako limita měřitelných funkcí). \square

Věta 8.2 (Existence a jednoznačnost součinné míry) *Existuje právě jedna míra $\mu \otimes \nu$ na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ s vlastností*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B), \quad A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$$

(klademe $0 \cdot \infty = 0$).

Důkaz: Pro $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ položme

$$(\mu \otimes \nu)(E) := \int \nu(E_x) d\mu(x). \tag{1}$$

Nejprve ukážeme, že $\mu \otimes \nu$ je míra na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Zřejmě $(\mu \otimes \nu)(\emptyset) = 0$. Jsou-li $E_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ po dvou disjunktní, platí

$$\begin{aligned} (\mu \otimes \nu)\left(\bigcup_n E_n\right) &= \int \nu\left(\left(\bigcup_n E_n\right)_x\right) d\mu(x) = \int \nu\left(\bigcup_n (E_n)_x\right) d\mu(x) \\ &= \int \sum_n \nu((E_n)_x) d\mu(x) = \sum_n (\mu \otimes \nu)(E_n) \end{aligned}$$

(využili jsme faktu, že řezy disjunktních množin jsou opět disjunktní). Tedy $\mu \otimes \nu$ je míra.

Z definice je zřejmé, že pro měřitelný obdélník $A \times B$ je $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Zbývá ukázat jednoznačnost. Použijeme Větu 7.3. Systém všech měřitelných obdélníků je uzavřen na konečné průniky a součinná míra je na měřitelných obdélnících jednoznačně určena. Protože μ a ν jsou σ -konečné míry, existují množiny $A_n \in \mathcal{A}$, $\mu(A_n) < \infty$, $A_n \nearrow X$, a $B_n \in \mathcal{B}$, $\nu(B_n) < \infty$, $B_n \nearrow Y$, $n \rightarrow \infty$. Měřitelné obdélníky $C_n := A_n \times B_n$ pak splňují $(\mu \otimes \nu)(C_n) < \infty$ a $C_n \nearrow X \times Y$, předpoklady Věty 7.3 jsou tedy splněny. \square

Přednáška 9.11.2020

Definice 8.2 (Obraz míry) Buď $\varphi : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (F, \mathcal{F})$ měřitelné zobrazení a μ míra na (E, \mathcal{E}) . Pak množinová funkce

$$\mu\varphi^{-1} : B \mapsto \mu(\varphi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{F},$$

je míra na (F, \mathcal{F}) a nazýváme ji *obrazem míry* μ při zobrazení φ .

Tvrzení 8.3 (Symetrie součinnové míry) Platí $\nu \otimes \mu = (\mu \otimes \nu)\tau^{-1}$, kde $\tau : X \times Y \rightarrow Y \times X$ je záměna souřadnic, tedy $\tau : (x, y) \mapsto (y, x)$.

Důkaz: Nejprve ověříme, že $\tau^{-1}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$. Toto snadno plyne z Věty 3.1 (ii), neboť $\tau^{-1}(\sigma\mathcal{S}) = \sigma(\tau^{-1}\mathcal{S})$, kde \mathcal{S} značí systém všech měřitelných obdélníků v $X \times Y$.

Míry $\nu \otimes \mu$ a $(\mu \otimes \nu)\tau^{-1}$ se shodují na měřitelných obdélnících, tedy se rovnají podle předchozí věty. \square

Důsledek 8.4 Platí

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int \mu(E^y) d\nu(y), \quad E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

Důkaz: Platí

$$(\mu \otimes \nu)(E) = (\nu \otimes \mu)(\tau^{-1}(E)) = \int \mu((\tau^{-1}E)_y) d\nu(y) = \int \mu(E^y) d\nu(y),$$

využili jsme předchozího tvrzení a vztahu (1). \square

Věta 8.5 (Fubiniova věta) Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes \nu)$ platí:

$$\int f d(\mu \otimes \nu) = \int \left(\int f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Důkaz:

1. Je-li f charakteristickou funkcí množiny ze součinnové σ -algebry, plyne rovnost z (1) a Důsledku 8.4.
2. Pro jednoduchou měřitelnou funkci $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{E_i}$ máme

$$\begin{aligned} \int s d(\mu \otimes \nu) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \int \nu((E_i)_x) d\mu(x) \\ &= \int \sum_{i=1}^k \alpha_i \nu((E_i)_x) d\mu(x) \\ &= \int \left(\int s(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x). \end{aligned}$$

Z uvedeného výpočtu rovněž plyne, že funkce $x \mapsto \int s(x, y) d\nu(y)$ je měřitelná. Druhá rovnost se odvodí analogicky.

3. Buď $f \geq 0$ měřitelná a $s_n \nearrow f$ jednoduché měřitelné funkce. Pak podle Leviho věty

$$\int s_n(x, y) d\nu(y) \nearrow \int f(x, y) d\nu(y), \quad x \in X.$$

Protože integrály na levé straně jsou měřitelnými funkcemi proměnné x , i integrál na pravé straně je měřitelnou funkcí v x a opětovným použitím Leviho věty dostaneme

$$\int \int s_n(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \nearrow \int \int f(x, y) d\nu(y) d\mu(x).$$

Podle již dokázané části 2 se integrál na levé straně shoduje s

$$\int s_n d(\mu \otimes \nu) \nearrow \int f d(\mu \otimes \nu),$$

čímž dostáváme první z obou dokazovaných rovností (a druhá opět plyne analogicky).

4. Je-li $f = f^+ - f^- \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes \nu)$, ověříme rovnost snadno pomocí příslušných rovností pro f^+ a f^- .

□

Příklad: Uvažujme $X = Y = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $\mu = \nu$ je aritmetická míra. Definujme funkci $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ následovně:

$$f(z_1, z_2) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } z_2 = z_1 \geq 0 \text{ nebo } z_2 = z_1 - 1 \leq -1, \\ -1 & \text{pokud } z_2 = z_1 < 0 \text{ nebo } z_2 = z_1 - 1 > -1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Platí

$$\int \int f(z_1, z_2) d\mu(z_1) d\mu(z_2) = \sum_{z_2} \sum_{z_1} f(z_1, z_2) = 0,$$

ale

$$\int \int f(z_1, z_2) d\mu(z_2) d\mu(z_1) = \sum_{z_1} \sum_{z_2} f(z_1, z_2) = 2,$$

přítom ovšem $f \notin \mathcal{L}^*(\mu \otimes \mu)$.

Pozn.: Prostor se součinnou mírou $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ nemusí být úplný, ani když prostory (X, \mathcal{A}, μ) a (Y, \mathcal{B}, ν) jsou úplné. Zúplněný prostor se součinnou mírou značíme $(X \times Y, \hat{\mathcal{A}} \otimes \hat{\mathcal{B}}, \mu \hat{\otimes} \nu)$.

Důsledek 8.6 (Fubiniova věta pro zúplněnou součinnou míru) *Bud'te (X, \mathcal{A}, μ) a (Y, \mathcal{B}, ν) dva úplné prostory se σ -konečnými měrami. Pak pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mu \hat{\otimes} \nu)$ platí:*

$$\int f d(\mu \hat{\otimes} \nu) = \int \left(\int f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Důkaz: Rovnost nejprve dokážeme pro případ $f = \chi_E$, kde $E \in \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$. Podle Věty 2.4 existuje $F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ taková, že $E \Delta F$ je nulová, tedy

$$\int f d(\mu \hat{\otimes} \nu) = (\mu \hat{\otimes} \nu)(E) = (\mu \otimes \nu)(F).$$

Podle Fubiniovy věty platí $(\mu \otimes \nu)(F) = \int \nu(F_x) d\mu(x)$. Ukážeme-li, že

$$\int \nu(E_x) d\mu(x) = \int \nu(F_x) d\mu(x),$$

dokážeme tím první z dvou dokazovaných rovností věty pro případ $f = \chi_E$ (druhá rovnost plyne analogicky.) K tomu stačí ukázat, že $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ μ -s.v. Z definice nulové množiny víme, že existuje $N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ taková, že $E \Delta F \subset N$ a $(\mu \otimes \nu)(N) = 0$. Ze vztahu (1) plyne $\nu(N_x) = 0$ μ -s.v. Dále zřejmě platí

$$E_x \Delta F_x = (E \Delta F)_x \subset N_x,$$

tedy také $\nu(E_x \Delta F_x) = 0$ μ -s.v., a tudíž $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ μ -s.v.

Dále lze postupně ukázat platnost rovnosti pro jednoduché měřitelné funkce, nezáporné měřitelné funkce a funkce z $\mathcal{L}^*(\mu \hat{\otimes} \nu)$, stejně jako v důkazu Věty 8.5. \square

Věta 8.7 (Součin Lebesgueových měr) Pro $p, q \in \mathbb{N}$ platí:

- (i) $\mathcal{B}^{p+q} = \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q$,
- (ii) $\lambda^{p+q} = \lambda^p \otimes \lambda^q$.

Důkaz: (i). Každý otevřený $(p+q)$ -kvádr je kartézským součinem otevřeného p -kvádru a otevřeného q -kvádru. Nechť \mathcal{Q}^k značí systém všech otevřených k -kvádrů. Pak platí

$$\mathcal{B}^{p+q} = \sigma\{U \times V : U \in \mathcal{Q}^p, V \in \mathcal{Q}^q\} \subset \sigma\{A \times B : A \in \mathcal{B}^p, B \in \mathcal{B}^q\} = \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q.$$

Pro druhou inkluzi stačí ukázat, že $A \times B \in \mathcal{B}^{p+q}$ kdykoliv $A \in \mathcal{B}^p$ a $B \in \mathcal{B}^q$. Označme

$$\mathcal{D}_1 := \{A \in \mathcal{B}^p : A \times V \in \mathcal{B}^{p+q} \text{ kdykoliv } V \in \mathcal{Q}^q\}.$$

Zřejmě $\mathcal{Q}^p \subset \mathcal{D}_1$ a snadno lze ukázat, že \mathcal{D}_1 je σ -algebra. Platí tedy $\mathcal{D}_1 = \mathcal{B}^p$. Dále označme

$$\mathcal{D}_2 := \{B \in \mathcal{B}^q : A \times B \in \mathcal{B}^{p+q} \text{ kdykoliv } A \in \mathcal{B}^p\}.$$

Platí $\mathcal{Q}^q \subset \mathcal{D}_2$ (protože $\mathcal{D}_1 = \mathcal{B}^p$) a \mathcal{D}_2 je opět σ -algebra, tudíž $\mathcal{D}_2 = \mathcal{B}^q$. σ -algebra \mathcal{B}^{p+q} tedy obsahuje všechny měřitelné obdélníky v $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, a musí tedy obsahovat i $\mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q$.

(ii). Míry λ^{p+q} a $\lambda^p \otimes \lambda^q$ se shodují na otevřených kvádrech z \mathcal{Q}^{p+q} . Systém \mathcal{Q}^{p+q} je uzavřen na konečné průniky, generuje \mathcal{B}^{p+q} a existuje posloupnost otevřených kvádrů $Q_i \nearrow \mathbb{R}^{p+q}$ konečné míry, tedy λ^{p+q} a $\lambda^p \otimes \lambda^q$ se shodují i na \mathcal{B}^{p+q} podle Věty 7.3. \square

V dalším budeme symbolem $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^k)$ zkráceně značit prostor $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_0^k, \lambda^k)$.

Důsledek 8.8 (Fubiniova věta v \mathbb{R}^{p+q}) Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ platí

$$\int f(x, y) d(x, y) = \int \left(\int f(x, y) dy \right) dx = \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy,$$

kde píšeme stručně $dx := d\lambda^p(x)$, $dy := d\lambda^q(y)$, $d(x, y) := d\lambda^{p+q}(x, y)$.

Důsledek 8.9 Pro množinu $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ platí

$$\lambda^{p+q}(A) = \int_{\pi_1 A} \lambda^q(A_x) dx = \int_{\pi_2 A} \lambda^p(A^y) dy,$$

kde $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$ a $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$ jsou projekce.

Důsledek 8.10 Pro funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ a množinu $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ platí

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_{\pi_1 A} \left(\int_{A_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\pi_2 A} \left(\int_{A^y} f(x, y) dx \right) dy.$$

Příklad: Pro jednotkovou kouli $B_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ v \mathbb{R}^3 dostáváme podle Důsledku 8.9

$$\lambda^3(B_1) = \int_{-1}^1 \pi(1 - z^2) dz = \frac{4}{3}\pi.$$

Přednáška 16.11.2020

9 Věta o substituci

Připomenutí: Pro funkci $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ a diferencovatelnou surjektivní monotónní funkci $\varphi : (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))|\varphi'(x)| dx = \int_\alpha^\beta f(y) dy,$$

má-li jedna strana smysl jako Newtonův integrál.

Pozn.: Lebesgueova míra λ^n je translačně invariantní (tedy $\lambda^n(B+z) = \lambda^n(B)$ kdykoliv $B \in \mathcal{B}^n$ a $z \in \mathbb{R}^n$). To plyne z věty o jednoznačnosti míry, neboť λ^n a míra $\mu(B) := \lambda^n(B+z)$, $B \in \mathcal{B}^n$, se shodují na otevřených kvádrech.

Tvrzení 9.1 *Bud' $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulární lineární zobrazení a $A \in \mathcal{B}^n$. Pak $L(A) \in \mathcal{B}^n$ a platí $\lambda^n(L(A)) = |\det L|\lambda^n(A)$.*

Důkaz: Každé lineární zobrazení mezi konečněrozměrnými prostory je spojité. Protože L je regulární, existuje (spojité) inverzní zobrazení L^{-1} , a tedy $L(A) = (L^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{B}^n$.

Podle známé věty z lineární algebry lze každé regulární lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vyjádřit jako složení konečně mnoha "elementárních" lineárních zobrazení jednoho ze tří typů:

- (i) $L_1 : (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ (tedy L_1 prohazuje i -tou a j -tou souřadnici vektoru);
- (ii) $L_2 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + bx_1)$ ($b \in \mathbb{R}$) (L_2 přičte k n -té souřadnici b -násobek první souřadnice);
- (iii) $L_3 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, ax_n)$ ($a \neq 0$) (L_3 vynásobí n -tou souřadnici nenulovým faktorem a).

Protože složené lineární zobrazení odpovídá součinu příslušných matic, a determinant součinu je součinem determinantu jednotlivých matic, stačí dokazovanou identitu ukázat pro případy $L = L_1, L_2$ a L_3 .

Míry $\lambda^n L_1$ a λ^n se shodují na systému otevřených kvádrů. Podle věty o jednoznačnosti míry se tedy shodují i na Borelovské σ -algebře, a máme tedy $\lambda^n(L_1(A)) = \lambda^n(A) = |\det L_1|\lambda^n(A)$, $A \in \mathcal{B}^n$.

Podle Fubiniovy věty platí

$$\lambda^n(L_2(A)) = \int_{\Pi_{n-1}(A)} \lambda^1((L_2(A))_{(x_1, \dots, x_{n-1})}) d(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

kde $\Pi_{n-1} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$. Pro řez množiny $L_2(A)$ pak z tvaru L_2 dostáváme

$$(L_2(A))_{(x_1, \dots, x_{n-1})} = A_{(x_1, \dots, x_{n-1})} + bx_1,$$

a protože λ^1 je translačně invariantní a $\Pi_{n-1}(L_2(A)) = \Pi_{n-1}(A)$, máme

$$\lambda^n(L_2(A)) = \int_{\Pi_{n-1}(A)} \lambda^1(A_{(x_1, \dots, x_{n-1})}) d(x_1, \dots, x_{n-1}) = \lambda^n(A).$$

Jelikož $|\det L_2| = 1$, ověřili jsme tím rovnost pro L_2 .

Míry λ^n a $\mu(A) := |a|^{-1} \lambda^n(L_3(A))$ se shodují na systému otevřených kvádrů, proto se shodují podle věty o jednoznačnosti i na borelovských množinách. Platí tedy $\lambda^n(L_3(A)) = |a| \lambda^n(A) = |\det L_3| \lambda^n(A)$. Tím je důkaz ukončen. \square

Důsledek 9.2 (Lebesgueova míra je izometricky invariantní) *Je-li $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ izometrie (tzn. $\|S(x) - S(y)\| = \|x - y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$), pak $\lambda^n(S(A)) = \lambda^n(A)$, $A \in \mathcal{B}^n$.*

Důkaz: Podle věty z lineární algebry lze každou izometrii v \mathbb{R}^n zapsat ve tvaru

$$S : x \mapsto b + R(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

kde $b \in \mathbb{R}^n$ ("posunutí") a R je ortogonální lineární zobrazení (tzn. $R^T R = I$). Protože $|\det R| = 1$ a λ^n je translačně invariantní, dostáváme $\lambda^n(S(A)) = \lambda^n(A)$ z Tvzení 9.1. \square

Důsledek 9.3 *Je-li $W \subset \mathbb{R}^n$ afinní podprostor dimenze menší než n , platí $\lambda^n(W) = 0$.*

Důkaz: Plyne z faktu, že vhodné izometrické zobrazení zobrazí W na lineární podprostor generovaný prvními $k < n$ vektory kanonické báze \mathbb{R}^n . \square

Důsledek 9.4 *Tvrzení 9.1 platí i bez předpokladu regularity zobrazení L .*

Důkaz: Je-li L singulární, je $L(\mathbb{R}^n)$ podprostor dimenze menší než n , a zároveň $\det L = 0$. \square

Důsledek 9.5 (Homogenita Lebesgueovy míry)

$$\lambda^n(rA) = |r|^n \lambda^n(A), \quad r \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathcal{B}^n.$$

Definice 9.1 Necht' $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ zobrazení třídy C^1 . Pak $\mathcal{J}f(x) := \det Df(x)$ je *Jakobián funkce f v bodě x* , $x \in U$.

Definice 9.2 Necht' $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Zobrazení $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ je *difeomorfismus*, je-li prosté, třídy C^1 a platí-li $\mathcal{J}f(x) \neq 0$, $x \in U$.

Pozn.: Z věty o inverzním zobrazení plyne, že je-li $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ difeomorfismus, je obraz $f(U)$ otevřená množina a f^{-1} je třídy C^1 na $f(U)$.

Věta 9.6 (Věta o substituci) *Bud' $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ difeomorfismus a $f : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

$$\int_U f(\varphi(x)) |\mathcal{J}\varphi(x)| dx = \int_{\varphi(U)} f(y) dy,$$

má-li jedna strana smysl.

[BEZ DŮKAZU]

Důsledek 9.7 *Je-li navíc $B \subset \varphi(U)$ Lebesgueovsky měřitelná množina, platí*

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(x)) |\mathcal{J}\varphi(x)| dx = \int_B f(y) dy,$$

má-li jedna strana smysl.

Příklad: Zobrazení $\varphi : (r, t) \mapsto (r \cos t, r \sin t)$ je difeomorfismus na $U = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$, $\mathcal{J}\varphi(r, t) = r$ a platí $\lambda^2(\mathbb{R}^2 \setminus \varphi(U)) = 0$, proto

$$\lambda^2(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} r d(r, t), \quad B \in \mathcal{B}_0^2.$$

Přednáška 23.11.2020

10 Prostory L^p

Definice 10.1 Bud' (X, \mathcal{A}, μ) prostor s mírou a funkce $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ měřitelná. Definujeme

$$\begin{aligned}\|f\|_p &:= \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_\infty &:= \inf\{\alpha \geq 0 : \mu\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = 0\}, \\ \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) &:= \{f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}^*) : \|f\|_p < \infty\}, \quad 1 \leq p \leq \infty.\end{aligned}$$

(Často budeme psát stručně pouze $\mathcal{L}^p(\mu)$ nebo $\mathcal{L}^p(X)$.)

Pozn.: Platí $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ -skoro všude.

Tvrzení 10.1 (Hölderova nerovnost) *Nechť $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a platí*

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Důkaz: Uvažujme nejprve případ $p = 1$, $q = \infty$. Pak

$$\|fg\|_1 = \int |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq \|g\|_\infty \int |f(x)| d\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Dále předpokládejme, že $1 < p, q < \infty$. K důkazu nerovnosti použijeme pomocné lemma:

Lemma 10.2 (Youngovo lemma) *Je-li $a, b \geq 0$ a $p, q > 1$ takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pak*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz: Nechť $ab > 0$ jinak je nerovnost zřejmá). Protože logaritmus je konkávní funkce, platí

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q = \log a + \log b = \log(ab).$$

Z toho již plyne dokazovaná rovnost, neboť logaritmus je rostoucí funkce. \square

Dokončení důkazu Hölderovy nerovnosti: Je-li $\|f\|_p = 0$ nebo $\|g\|_q = 0$, musí být $f \cdot g = 0$ s.v. a nerovnost zřejmě platí. Nechť dále $\|f\|_p > 0$ a $\|g\|_q > 0$. Podle Youngovy nerovnosti platí

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}, \quad x \in X,$$

a zintegrováním dostaneme

$$\frac{\int |f \cdot g| d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{\|f\|_p^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_q^q}{q\|g\|_q^q} = 1,$$

což je Hölderova nerovnost. \square

Věta 10.3 (Minkowského nerovnost) *Jsou-li $1 \leq p \leq \infty$ a $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, pak také $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ a platí*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Důkaz: Je-li $p = 1$, nerovnost snadno plyne z trojúhelníkové nerovnosti $|f + g| \leq |f| + |g|$ zintegrováním. Je-li $p = \infty$, platí podle definice $|f| \leq \|f\|_\infty$ s.v. a $|g| \leq \|g\|_\infty$ s.v., tedy

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ s.v.,}$$

z čehož plyne $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Nechť nyní $1 < p < \infty$. Funkce $x \mapsto x^p$ je konvexní na $(0, \infty)$, tudíž

$$\left| \frac{f + g}{2} \right|^p \leq \left(\frac{|f| + |g|}{2} \right)^p \leq \frac{|f|^p + |g|^p}{2},$$

z čehož zintegrováním dostaneme

$$\|f + g\|_p^p \leq 2^{p-1} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) < \infty.$$

Tedy $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Položme $q := \frac{p}{p-1}$ (platí tedy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Funkce $|f + g|^{p-1}$ leží v $\mathcal{L}^q(\mu)$ a podle Hölderovy nerovnosti platí

$$\begin{aligned} \int (|f| \cdot |f + g|^{p-1}) d\mu &\leq \|f\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q, \\ \int (|g| \cdot |f + g|^{p-1}) d\mu &\leq \|g\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q. \end{aligned}$$

Sečtením obou nerovností a s využitím identity

$$\| |f + g|^{p-1} \|_q = \|f + g\|_p^{p-1}$$

dostaneme

$$\int |f + g|^p d\mu \leq \int (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} d\mu \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1},$$

což je Minkowského nerovnost. \square

Pozn.: $\mathcal{L}^p(\mu)$ je tedy vektorový prostor a $\|\cdot\|_p$ je *seminorma* (tedy splňuje vlastnosti normy, s tou výjimkou, že z $\|f\|_p = 0$ neplyne $f = 0$).

Definice 10.2 Necht' $1 \leq p \leq \infty$. Na množině $\mathcal{L}^p(\mu)$ definujeme ekvivalenci

$$f \sim g \iff f = g \mu - \text{skoro všude.}$$

Dále klademe

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu) / \sim$$

(faktorprostor, formálně množina tříd ekvivalence \sim).

Tvrzení 10.4 Pro $1 \leq p \leq \infty$ a $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ platí

$$\|f - g\|_p = 0 \iff f \sim g.$$

Důkaz: Plyne z Věty 6.1.

Důsledek: $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ je normovaný lineární prostor.

Věta 10.5 Prostor $L^p(\mu)$ je úplný.

[Důkaz: přednáška MA3]

11 Konvergence posloupností funkcí

Rekapitulace: Pro reálné funkce f_n, f definované na neprázdné množině X máme konvergenci *bodovou* ($f_n \rightarrow f$) a *stejnouměrnou* ($f_n \rightrightarrows f$). Je-li speciálně (X, \mathcal{A}, μ) prostor s mírou, máme navíc konvergenci *skoro všude* ($f_n \rightarrow f$ s.v.) a *L^p -konvergenci* ($f_n \xrightarrow{L^p} f \iff \|f_n - f\|_p \rightarrow 0$), $1 \leq p \leq \infty$.

Definice 11.1 Bud' (X, \mathcal{A}, μ) prostor s mírou a $f_n, f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelné funkce, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že funkce f_n *konvergují k funkci f podle míry μ* (píšeme $f_n \xrightarrow{\mu} f$), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Věta 11.1 Pro $1 \leq p \leq \infty$ a $f_n, f \in L^p(\mu)$ platí:

$$f_n \xrightarrow{L^p} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

Tvrzení 11.2 (Čebyševova nerovnost) Necht' $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mu)$ a $c > 0$. Pak

$$\mu\{x \in X : |f(x)| \geq c\} \leq \frac{\|f\|_p^p}{c^p}.$$

Důkaz: Platí

$$\mu\{|f| \geq c\} = \int_{\{|f| \geq c\}} 1 \, d\mu \leq \int_{\{|f| \geq c\}} \left(\frac{|f|}{c}\right)^p \, d\mu \leq \int \left(\frac{|f|}{c}\right)^p \, d\mu = \frac{\|f\|_p^p}{c^p}.$$

□

Důkaz Věty 11.1: Je-li $p = \infty$ a $\varepsilon > 0$, pak existuje n_0 takové, že $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$, a tedy $\mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} = 0$, pro $n > n_0$.

Je-li $p < \infty$, plyne tvrzení přímo z Čebyševovy nerovnosti. □

Věta 11.3 (Jegorov) *Nechť $\mu(X) < \infty$, f_n, f jsou reálné měřitelné funkce na X , $f_n \rightarrow f$ μ -s.v., a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $E \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(E) < \varepsilon$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $X \setminus E$.*

Důkaz: Existuje množina N nulové míry taková, že $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $x \in X \setminus N$. Položme

$$A_{m,k} := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \text{ pro každé } n \geq m\}, \quad m, k \in \mathbb{N}.$$

Pak pro každé k platí $A_{1,k} \subset A_{2,k} \subset \dots$ a z definice konvergence platí

$$\bigcap_m (X \setminus A_{m,k}) \subset N.$$

Podle věty o spojitosti míry a díky konečnosti μ tedy existuje $m(k)$ takové, že $\mu(X \setminus A_{m(k),k}) < \varepsilon 2^{-k}$. Položme $E := \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus A_{m(k),k})$. Zřejmě $\mu(E) < \varepsilon$. Nechť $x \in X \setminus E$. Pak $x \in A_{m(k),k}$ pro všechna k , a tedy $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ kdykoliv $n \geq m(k)$. Tím je dokázána stejnoměrná konvergence f_n k f na $X \setminus E$. □

Důsledek 11.4 *Jestliže $\mu(X) < \infty$ a f_n, f jsou reálné měřitelné funkce na X takové, že $f_n \rightarrow f$ μ -s.v., pak $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

Důkaz: Pro $\varepsilon, \delta > 0$ platí

$$\mu\{|f_n - f| \geq \delta\} = \mu(\{|f_n - f| \geq \delta\} \cap E) + \mu(\{|f_n - f| \geq \delta\} \setminus E),$$

kde E je množina z Jegorovy věty. První sčítanec je pak menší než ε a druhý je roven nule pro dostatečně velká n . □

Pozn.: Funkce $f_n = \chi_{[n,\infty)}$ konvergují bodově k nule, ale nikoliv podle míry λ^1 . Předpoklad konečnosti míry je tedy v Jegorově větě nutný.

Tvrzení 11.5 *Jestliže $f_n \xrightarrow{\mu} f$ na prostoru s konečnou mírou μ , pak existuje vybraná podposloupnost (f_{n_j}) taková, že $f_{n_j} \rightarrow f$ μ -s.v.*

Důkaz Ke každému $j \in \mathbb{N}$ existuje $n_j \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu\{|f_n - f| \geq 2^{-j}\} < 2^{-j}$ kdykoliv $n \geq n_j$. Položme

$$A_j := \{x \in X : |f_{n_j}(x) - f(x)| > 2^{-j}\}, \quad A := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j.$$

Platí

$$\mu(A) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_j) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{1-k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

tedy $\mu(A) = 0$. Přitom $f_{n_j}(x) \rightarrow f(x)$, $j \rightarrow \infty$, kdykoliv $x \in X \setminus A$. □

Přednáška 30.11.2020

Věta 11.6 *Nechť $\mu(X) < \infty$ a $1 \leq p < q \leq \infty$. Pak $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ a pro $f_n, f \in L^q(\mu)$ platí:*

$$f_n \xrightarrow{L^q} f \implies f_n \xrightarrow{L^p} f.$$

Důkaz: Je-li $f \in L^q$, platí

$$\int |f|^p = \int_{|f| \leq 1} |f|^p + \int_{|f| > 1} |f|^p \leq \mu(X) + \int |f|^q < \infty,$$

tedy $f \in L^p$. Nechť dále $f_n \xrightarrow{L^q} f$ a $\varepsilon > 0$. Pro $\delta > 0$ je

$$\int |f_n - f|^p = \int_{|f_n - f| \leq \delta} |f_n - f|^p + \int_{|f_n - f| > \delta} |f_n - f|^p \leq \delta^p \mu(X) + \delta^{p-q} \int |f_n - f|^q.$$

Zvolme $\delta > 0$ tak malé, aby $\delta^p \mu(X) < \frac{\varepsilon}{2}$. K tomuto δ pak existuje n_0 takové, že $\delta^{p-q} \int |f_n - f|^q < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $n \geq n_0$. Pak je $\int |f_n - f|^p < \varepsilon$ pro $n \geq n_0$, a tím je $f_n \xrightarrow{L^p} f$ dokázáno. \square

Příklad: $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ leží v $L^1(0, 1)$, ale nikoliv v $L^2(0, 1)$. Funkce $f(x) = x^{-1}$ leží v $L^2(1, \infty)$, ale nikoliv v $L^1(1, \infty)$.

12 Radon-Nikodymova věta

Tvrzení 12.1 *Bud' (X, \mathcal{A}, μ) prostor s mírou a $f \geq 0$ měřitelná funkce na X . Pak předpis*

$$\nu : A \mapsto \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

definuje míru na (X, \mathcal{A}) a pro každou měřitelnou funkci g na X platí

$$\int g d\nu = \int g \cdot f d\mu,$$

má-li jedna strana smysl.

Důkaz: Zřejmě $\nu(\emptyset) = 0$ a $\nu \geq 0$. Ukážeme σ -aditivitu. Jsou-li $A_n \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní, je

$$\nu\left(\bigcup_n A_n\right) = \int (f \cdot \chi_{\bigcup_n A_n}) d\mu = \int \sum_n (f \cdot \chi_{A_n}) d\mu = \sum_n \int_{A_n} f d\mu = \sum_n \nu(A_n).$$

Rovnost $\int g d\nu = \int g \cdot f d\mu$ platí z definice, pokud g je charakteristickou funkcí měřitelné množiny. Standardním způsobem platnost rovnosti rozšíříme postupně pro jednoduché měřitelné funkce, nezáporné měřitelné a nakonec pro měřitelné, pro něž integrál existuje. \square

Pozn.: Zřejmě platí: $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0, A \in \mathcal{A}$.

Definice 12.1 Buďte μ, ν dvě míry na (X, \mathcal{A}) . Řekneme, že míra ν je *absolutně spojitá* vzhledem k míře μ (píšeme $\nu \ll \mu$), jestliže

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Tvrzení 12.2 Buďte μ, ν dvě konečné míry na (X, \mathcal{A}) . Pak $\nu \ll \mu$ právě tehdy, když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall A \in \mathcal{A}) : \mu(A) < \delta \implies \nu(A) < \varepsilon.$$

Důkaz: Implikace \Leftarrow je snadno vidět. Ukážeme opačnou implikaci. Nechtě tedy $\nu \ll \mu$ a předpokládejme pro spor, že neplatí uvedený výrok, tedy že

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists A \in \mathcal{A}) : \mu(A) < \delta, \nu(A) \geq \varepsilon.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy existuje množina $A_n \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(A) < 2^{-n}$, ale $\nu(A) \geq \varepsilon$. Položme $A := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n$. Pak

$$\mu(A) \leq \mu \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) < 2^{-k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

tedy $\mu(A) = 0$. Přitom ale, podle věty o spojitosti míry (míra ν je konečná) platí

$$\nu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n \right) \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu(A_{k+1}) \geq \varepsilon > 0,$$

což je spor. □

Věta 12.3 (Radon-Nikodym) Buďte μ, ν dvě σ -konečné míry na (X, \mathcal{A}) takové, že $\nu \ll \mu$. Pak existuje nezáporná měřitelná funkce f na X taková, že

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Definice 12.2 Funkci f z předchozí věty nazýváme (Radon-Nikodymovou) *hustotou* míry ν vzhledem k μ a píšeme

$$f(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x), \quad x \in X.$$

Tvrzení 12.4 Buďte μ, ν dvě konečné míry na (X, \mathcal{A}) takové, že $\nu(A) \leq \mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$. Pak existuje měřitelná funkce f na X splňující $0 \leq f \leq 1$ μ -s.v. a

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Důkaz: Označme funkcionál

$$\mathcal{J}g := \int g^2 d\mu - 2 \int g d\nu, \quad g \in L^2(\mu).$$

(Funkcionál je dobře definován, protože $L^2(\mu) \subset L^1(\mu) \subset L^1(\nu)$.) Dále označme $c := \inf\{\mathcal{J}g : g \in L^2(\mu)\}$. Platí

$$\mathcal{J}g \geq \int g^2 d\mu - 2 \int |g| d\mu = \int (|g| - 1)^2 d\mu - \mu(X) \geq -\mu(X),$$

tedy $c \geq -\mu(X) > -\infty$. Bud' $(f_n) \subset L^2(\mu)$ posloupnost taková, že $\mathcal{J}f_n \rightarrow c$. Ukážeme, že (f_n) je Cauchyovská v $L^2(\mu)$.

Pro libovolné $g, h \in L^2(\mu)$ platí

$$\begin{aligned} \mathcal{J}g + \mathcal{J}h &= \int (g^2 + h^2) d\mu - 2 \int (g + h) d\nu, \\ -2\mathcal{J}\left(\frac{g+h}{2}\right) &= -\int \frac{(g+h)^2}{2} d\mu + 2 \int (g + h) d\nu, \end{aligned}$$

sečtením pak dostaneme

$$\mathcal{J}g + \mathcal{J}h - 2\mathcal{J}\left(\frac{g+h}{2}\right) = \frac{1}{2} \int (g-h)^2 d\mu = \frac{1}{2} \|g-h\|_2^2.$$

Z toho plyne, že

$$\begin{aligned} \|f_m - f_n\|_2^2 &= 2 \left(\mathcal{J}f_m + \mathcal{J}f_n - 2\mathcal{J}\left(\frac{f_m+f_n}{2}\right) \right) \\ &\leq 2(\mathcal{J}f_m + \mathcal{J}f_n - 2c) \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

tedy (f_n) je Cauchyovská v $L^2(\mu)$.

Dále platí $\int f_n^2 d\mu \rightarrow \int f^2 d\mu$ (protože norma je vždy spojitá), a

$$\left| \int f_n d\nu - \int f d\nu \right| \leq \int |f_n - f| d\nu \leq \int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0,$$

protože $f_n \rightarrow f$ i v $L^1(\mu)$. Platí tedy $\mathcal{J}f_n \rightarrow \mathcal{J}f$, takže $\mathcal{J}f = c$.

Bud' te nyní $A \in \mathcal{A}$ a $t \in \mathbb{R}$ libovolné. Protože $\mathcal{J}f \leq \mathcal{J}(f + t\chi_A)$, platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{J}(f + t\chi_A) - \mathcal{J}f = \int ((f + t\chi_A)^2 - f^2) d\mu - 2 \int t\chi_A d\nu \\ &= \int f \cdot 2t\chi_A d\mu + t^2 \mu(A) - 2t\nu(A) \\ &= 2t \left(\int_A f d\mu - \nu(A) \right) + t^2 \mu(A). \end{aligned}$$

V posledním řádku je kvadratický polynom v t , který nabývá minima v $t = 0$, tedy jeho lineární člen musí být roven nule, neboli

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

f je tedy hustotou $\frac{d\nu}{d\mu}$. Zbývá ukázat, že $0 \leq f \leq 1$ μ -s.v. Platí

$$\begin{aligned} 0 \leq \int (f - 1)^+ d\mu &= \int_{\{f > 1\}} (f - 1) d\mu = \int_{\{f > 1\}} f d\mu - \int_{\{f > 1\}} 1 d\mu \\ &= \nu(\{f > 1\}) - \mu(\{f > 1\}) \leq 0, \end{aligned}$$

tedy $(f - 1)^+ = 0$ μ -s.v., neboli $f \leq 1$ μ -s.v. Podobně platí

$$0 \leq \int f^- d\mu = - \int_{\{f < 0\}} f d\mu = -\nu(\{f < 0\}) \leq 0,$$

tedy $f^- = 0$ μ -s.v., což znamená, že $f \geq 0$ μ -s.v. □

Přednáška 7.12.2020

Důkaz Radon-Nikodymovy věty: Nechť nejprve μ, ν jsou konečné míry na (X, \mathcal{A}) , $\nu \ll \mu$. Použijeme Tvrzení 12.4 pro míry $\nu \leq \mu + \nu$. Existuje tedy měřitelná funkce h , $0 \leq h \leq 1$, taková, že

$$\nu(A) = \int_A h d(\mu + \nu) = \int_A h d\mu + \int_A h d\nu, \quad A \in \mathcal{A},$$

a tedy

$$\int_A (1-h) d\nu = \int_A h d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Standardním postupem snadno odvodíme, že pro každou nezápornou měřitelnou funkci g platí

$$\int g(1-h) d\nu = \int gh d\mu.$$

Specielně dostaneme

$$\nu\{h=1\} = \int_{\{h=1\}} h d(\mu + \nu) = \mu\{h=1\} + \nu\{h=1\},$$

tedy $\mu\{h=1\} = 0$, a protože $\nu \ll \mu$, také $\nu\{h=1\} = 0$. Platí tedy $h < 1$ $(\mu + \nu)$ -s.v.

Volbou $g := \frac{1}{1-h} \chi_A$ ve výše uvedené rovnosti dostaneme

$$\nu(A) = \int \frac{h}{1-h} d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

tedy $f = \frac{h}{1-h}$ je hledaná hustota $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Jsou-li μ, ν σ -konečné, existuje rozklad $X = \bigcup_i E_i$ na měřitelné množiny s $\mu(E_i) < \infty$, $\nu(E_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$. Pro konečné restrikce $\nu|_{E_i} \ll \mu|_{E_i}$ najdeme hustoty f_i na E_i , a výslednou hustotu sestojíme jako

$$f(x) := f_i(x), \quad x \in E_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

□

Pozn.: Hustota $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ je určena jednoznačně modulo ekvivalence \sim . (Cvičení)

Definice 12.3 Řekneme, že dvě míry μ, ν na témže měřitelném prostoru (X, \mathcal{A}) jsou *vzájemně singulární* (píšeme $\mu \perp \nu$), jestliže existuje množina $S \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(S) = 0$ a $\nu(X \setminus S) = 0$.

Příklady:

1. Je-li $x \neq y$, pak pro Diracovy míry platí $\delta_x \perp \delta_y$.
2. $\lambda^1 \perp \delta_x$ pro každý $x \in \mathbb{R}$.
3. $\lambda^1 \perp \mu$, kde μ je aritmetická míra na množině celých čísel.

Věta 12.5 (Rozklad míry na absolutně spojitou a singulární část) *Bud'te μ, ν dvě σ -konečné míry na téže měřitelném prostoru. Pak existuje rozklad $\nu = \nu_a + \nu_s$ na míry ν_a, ν_s takový, že $\nu_a \ll \mu$ a $\nu_s \perp \mu$. Míry ν_a a ν_s jsou jednoznačně určeny.*

Pozn.: Míra ν_a se nazývá *absolutně spojitá část* a míra ν_s *singulární část* míry ν vzhledem k μ .

Důkaz: Bud' $f_\mu := \frac{d\mu}{d(\mu+\nu)}$ Radon-Nikodýmova hustota. Označme $A := \{f_\mu > 0\}$ a $B := \{f_\mu = 0\}$; zřejmě $X = A \cup B$ je rozklad. Dále položme

$$\nu_a(\cdot) := \nu(\cdot \cap A), \quad \nu_s(\cdot) := \nu(\cdot \cap B).$$

Zřejmě $\nu = \nu_a + \nu_s$. Dále platí $\nu_s(A) = 0$ a $\mu(B) = 0$, tedy $\nu_s \perp \mu$. A pokud $\mu(E) = 0$ pro nějakou měřitelnou množinu E , pak

$$0 = \mu(E) = \int_E f_\mu d(\mu + \nu),$$

tedy $f_\mu = 0$ ν -s.v. na E , což znamená, $\nu(E \cap A) = 0$ (podle definice A), tedy $\nu_a(E) = 0$. Je tedy $\nu_a \ll \mu$.

Ukážeme ještě jednoznačnost rozkladu. Nechť $\nu = \nu'_a + \nu'_s$ je jiný rozklad takový, že $\nu'_a \ll \mu$ a $\nu'_s \perp \mu$. Ukážeme, že

$$\nu'_s(A) = 0 = \nu'_a(B). \tag{2}$$

Z toho pak plyne pro každou $E \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \nu'_s(E) &= \nu'_s(E \cap B) = \nu'_s(E \cap B) + \nu'_a(E \cap B) = \nu(E \cap B) = \nu_s(E), \\ \nu'_a(E) &= \nu'_a(E \cap A) = \nu'_a(E \cap A) + \nu'_s(E \cap A) = \nu(E \cap A) = \nu_a(E). \end{aligned}$$

Stačí tedy ověřit (2). Protože $\nu'_s \perp \mu$, existuje měřitelná množina S taková, že $\mu(S) = 0$ a $\nu'_s(X \setminus S) = 0$. Pak

$$0 = \mu(S \cap A) = \int_{S \cap A} f_\mu d(\mu + \nu).$$

Protože $f_\mu > 0$ na A , musí být $(\mu + \nu)(S \cap A) = 0$, tedy i $\nu(S \cap A) = 0$ a $\nu'_s(S \cap A) = 0$, tudíž $\nu'_s(A) = \nu'_s(A \cap S) + \nu'_s(A \setminus S) = 0$. Dále (z definice B) platí $\mu(B) = 0$ a $\nu'_a \ll \mu$, tedy i $\nu'_a(B) = 0$. Tím je (2) ověřeno a důkaz ukončen. \square

13 Věta o rozšíření míry

Definice 13.1 Necht' $X \neq \emptyset$ a \mathcal{A} je algebra podmnožin X . Řekneme, že funkce $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ je *pramíra*, jestliže

- (i) $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$,
- (ii) pro libovolné množiny $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní a takové, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, platí

$$\tilde{\mu} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i).$$

Pozn.: $\tilde{\mu}$ je zřejmě monotónní.

Příklad: Množinová funkce

$$\tilde{\mu}(A) := \begin{cases} 0, & A \subset \mathbb{N} \text{ konečná,} \\ \infty, & A \subset \mathbb{N} \text{ nekonečná} \end{cases}$$

je konečně aditivní množinová funkce na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, která není σ -aditivní.

Věta 13.1 (Hahn-Kolmogorovova věta o rozšíření míry) *Bud' $\tilde{\mu}$ pramíra na algebře \mathcal{A} podmnožin množiny X . Pak existuje míra μ na $\sigma\mathcal{A}$ taková, že $\tilde{\mu} = \mu$ na \mathcal{A} . Je-li $\tilde{\mu}$ σ -konečná, je μ jednoznačně určena.*

[Bez důkazu (bude v navazující přednášce)]

Tvrzení 13.2 *Bud' $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ konečná, konečně aditivní funkce na algebře \mathcal{A} splňující $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Pak $\tilde{\mu}$ je σ -aditivní právě tehdy, když*

$$A_i \in \mathcal{A}, A_i \searrow \emptyset \implies \tilde{\mu}(A_i) \rightarrow 0. \quad (3)$$

Pozn: Vlastnosti (3) se říká spojitost $\tilde{\mu}$ v prázdné množině.

Důkaz: \implies : Necht' $\tilde{\mu}$ je σ -aditivní a $A_i \in \mathcal{A}, A_i \searrow \emptyset$. Pak $A_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_{i+1})$ a množiny $A_i \setminus A_{i+1}$ jsou po dvou disjunktní, tedy

$$\tilde{\mu}(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i \setminus A_{i+1}) < \infty.$$

Rovněž platí $A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} (A_i \setminus A_{i+1})$, tedy

$$\tilde{\mu}(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i \setminus A_{i+1}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

\Leftarrow : Nechť nyní platí (3), $B_i \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní a $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$. Pro množiny $A_n := A \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n)$ platí $A_n \searrow \emptyset$, tedy $\tilde{\mu}(A_n) \rightarrow 0$. Z konečné aditivity $\tilde{\mu}$ máme

$$\tilde{\mu}(A) - \tilde{\mu}(A_n) = \tilde{\mu}(A \setminus A_n) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}(B_i),$$

a limitním přechodem $n \rightarrow \infty$ dostaneme $\tilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_i)$. \square

Příklady:

1. Označme symbolem \mathcal{A}_0 systém podmnožin \mathbb{R} obsahující prázdnou množinu a všechna konečná sjednocení intervalů typu $(a, b]$ a (a, ∞) , $a \in [-\infty, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$. Lze snadno nahlédnout, že \mathcal{A}_0 je algebra, a definujeme množinovou funkci $\tilde{\lambda}$ na \mathcal{A}_0 jako součet délek příslušných (disjunktních) intervalů. Lze ukázat, že $\tilde{\lambda}$ je σ -aditivní množinová funkce, tedy pramíra, a jejím rozšířením na $\sigma\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ je Lebesgueova míra λ^1 .
2. Na algebře \mathcal{A}_0 z předchozího příkladu uvažujme množinovou funkci

$$\tilde{\mu}(A) := \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ \infty, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

$\tilde{\mu}$ je zřejmě pramíra, nemá ale jednoznačné rozšíření na $\sigma\mathcal{A}_0$. Jedním možným rozšířením je míra definovaná stejným předpisem jako $\tilde{\mu}$ (tedy 0 pro prázdnou množinu a ∞ pro všechny neprázdné množiny), jiným rozšířením je aritmetická míra, nebo její libovolný kladný násobek.

Příklad. Položme $X := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (posloupnosti 0 – 1) a pro $n \in \mathbb{N}$ označme $\Pi_n : X \rightarrow \{0, 1\}^n$ projekci do prvních n souřadnic. Dále označme

$$\mathcal{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n^{-1}(\mathcal{P}\{0, 1\}^n).$$

Systém \mathcal{A} tvoří algebru a definujeme na ní množinovou funkci předpisem: Je-li $A \in \mathcal{A}$, pak $A = \Pi_n^{-1}(B)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $B \subset \{0, 1\}^n$; klademe

$$\tilde{\mu}(A) := \frac{\text{card } B}{2^n}.$$

$\tilde{\mu}$ je korektně definovaná konečně aditivní množinová funkce.

Na množině X zavedeme metriku

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}, \quad x, y \in X.$$

Potřebujeme tyto znalosti z matematické analýzy:

1. Konvergence posloupnosti v (X, d) je ekvivalentní konvergenci posloupností všech souřadnic.
2. (X, d) je kompaktní metrický prostor.
3. Každá množina $A \in \mathcal{A}$ je otevřená i uzavřená v (X, d) .

Jsou-li $A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $A_n \searrow \emptyset$, pak z kompaktnosti A_n plyne, že existuje n_0 takové, že $A_n = \emptyset$ pro $n > n_0$. Pak ale jistě $\tilde{\mu}(A_n) \rightarrow 0$, je tedy splněna podmínka (3) a tudíž $\tilde{\mu}$ je pramíra. Podle Hahn-Kolmogorovovy věty tedy existuje její jednoznačné rozšíření na míru μ na $\mathcal{B} := \sigma\mathcal{A}$. Míra μ je pravděpodobnostní míra a má význam rozložení pravděpodobnosti pro posloupnost nezávislých opakování pokusu hodů mincí.

Přednáška 14.12.2020

14 Distribuční funkce

Definice 14.1 Bud' μ konečná borelovská míra na \mathbb{R} . Pak

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

je *distribuční funkce* míry μ .

Tvrzení 14.1 (1) F_μ je neklesající,

$$(2) F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F_\mu(x) = 0, \quad F(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} F_\mu(x) < \infty,$$

$$(3) F_\mu \text{ je zprava spojitá.}$$

Důkaz: Tvrzení snadno plyne z monotonie a spojitosti míry. \square

Věta 14.2 Necht' funkce $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ má vlastnosti (1), (2) a (3). Pak existuje právě jedna konečná borelovská míra μ na \mathbb{R} taková, že $F_\mu = F$.

Důkaz: Bud' \mathcal{A}_0 algebra generovaná intervaly $(a, b]$, (a, ∞) , $a \in [-\infty, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$. Každou množinu $A \in \mathcal{A}_0$ můžeme vyjádřit jako disjunkttní konečné sjednocení $A = \bigcup_{i=1}^k (a_i, b_i]$ a definujeme množinovou funkci na \mathcal{A}_0 předpisem

$$\tilde{\mu}(A) := \sum_{i=1}^k (F(b_i) - F(a_i)).$$

Snadno lze ověřit, že $\tilde{\mu}$ je korektně definovaná a konečně aditivní na \mathcal{A}_0 . Ukážeme, že $\tilde{\mu}$ je *pramíra*. K tomu stačí ukázat spojitost v prázdné množině. Necht' tedy $A_n \in \mathcal{A}_0$, $A_n \searrow \emptyset$, a bud' $\varepsilon > 0$ dáno. Protože F má konečné limity v $-\infty$ a ∞ , existuje $M > 0$ takové, že

$$F(-M) + (F(\infty) - F(M)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

a tedy omezené množiny $B_n := A_n \cap (-M, M] \in \mathcal{A}_0$ splňují

$$\tilde{\mu}(B_n) \geq \tilde{\mu}(A_n) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vyjádříme B_n ve tvaru disjunkttního sjednocení $B_n := \bigcup_{i=1}^{k_n} (a_i^n, b_i^n]$ (zde $a_i^n, b_i^n \in \mathbb{R}$). Protože F je zprava spojitá, existuje $\delta_n > 0$ takové, že pro množinu $C_n := \bigcup_{i=1}^{k_n} (a_i^n + \delta_n, b_i^n]$ platí

$$\tilde{\mu}(B_n \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Množiny $K_n := \overline{C_1} \cap \dots \cap \overline{C_n}$ jsou kompaktní a splňují

$$K_n \searrow \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{C_i} \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset,$$

tedy existuje n , pro něž je $K_n = \emptyset$, a tedy $C_1 \cap \dots \cap C_n = \emptyset$. Pak platí

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(B_n) &= \tilde{\mu}\left(B_n \setminus \bigcap_{i=1}^n C_i\right) \\ &= \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^n (B_n \setminus C_i)\right) \\ &\leq \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^n (B_i \setminus C_i)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}(B_i \setminus C_i) < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Celkem tedy máme $\tilde{\mu}(A_n) < \varepsilon$, a protože ε bylo zvoleno libovolně malé, dokázali jsme, že $\tilde{\mu}(A_n) \searrow 0$. $\tilde{\mu}$ je tedy konečná pramíra na \mathcal{A}_0 a podle Hahn-Kolmogorovy věty existuje právě jedno rozšíření na míru μ na $\sigma\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. \square

Příklady:

1. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1 & x \geq a, \end{cases}$ je distribuční funkce Diracovy míry δ_a .

2. Jsou-li $-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_k < \infty$ a $t_1, \dots, t_k > 0$, pak

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1, \\ t_1 + \dots + t_i, & x \in [a_i, a_{i+1}), i = 1, \dots, k-1, \\ t_1 + \dots + t_k, & x \geq a_k, \end{cases}$$

je distribuční funkce míry $\mu = t_1\delta_{a_1} + \dots + t_k\delta_{a_k}$.

3. Je-li $f \in L^1(\lambda)$, $f \geq 0$, pak

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

je distribuční funkce míry $\mu(B) = \int_B f(t) dt$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definice 14.2 Konečná borelovská míry μ na \mathbb{R} je

- *diskrétní*, jestliže existuje spočetná množina $S \subset \mathbb{R}$ taková, že $\mu(\mathbb{R} \setminus S) = 0$;
- *neatomická*, jestliže $\mu(\{x\}) = 0$ pro každý $x \in \mathbb{R}$.

Cvičení:

1. Je-li μ zároveň diskrétní a neatomická, je nulová.
2. Každá diskrétní míra je tvaru $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} t_i \delta_{a_i}$ pro nějaké $t_i \geq 0$ a $a_i \in \mathbb{R}$, $\sum_i t_i < \infty$.
3. μ je neatomická $\iff F$ je spojitá.

Příklad: Cantorova funkce Položme $C_0 = [0, 1]$ a indukcí definujme množiny

$$C_n = \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

(platí $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$ a C_n jsou neprázdné kompaktní). Množina

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

se nazývá *Cantorovo diskontinuum*. Platí:

- $\lambda^1(C) = 0$,
- Číslo $x \in [0, 1]$ patří do C právě tehdy, když je lze vyjádřit ve trojkovém rozvoji $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j}$ s pomocí číslic $x_j \in \{0, 2\}$, $j = 1, 2, \dots$

Buď $C \subset [0, 1]$ Cantorovo diskontinuum. *Cantorovu funkci* F_C definujeme následovně. Klademe $F_C(x) = 0$ pro $x \leq 0$ a $F_C(x) = 1$ pro $x \geq 1$. Dále $x \in (0, 1)$ vyjádříme v trojkovém rozvoji

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j} \quad (x_j \in \{0, 1, 2\}),$$

označíme $n(x) := \inf\{j \in \mathbb{N} : x_j = 1\}$ a klademe

$$F_C(x) := \sum_{j=1}^{n(x)} \frac{\min\{x_j, 1\}}{2^j}, \quad x \in (0, 1).$$

(Je třeba ověřit, že hodnota $F_C(x)$ je korektně, tedy jednoznačně určená, i když x nemá jednoznačný rozvoj v trojkové soustavě!)

Funkce F_C je spojitá, neklesající a je distribuční funkcí *Cantorovy míry* μ_C , která je neatomická, ale přitom je singularní vzhledem k Lebesgueově míře.

Ukažme nejprve monotonii F_C . Buďte $0 \leq x < y \leq 1$, $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 3^{-j}$, $y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j 3^{-j}$, a necht' $x_j = y_j$ pro $1 \leq j < j_0$ a $x_{j_0} < y_{j_0}$. Pokud $x_j = y_j = 1$ pro některé $j < j_0$, pak zřejmě $F_C(x) = F_C(y)$. Necht' naopak $n(x), n(y) \geq j_0$, a označme $q := \sum_{j=1}^{j_0-1} 2^{-j} \min\{1, x_j\}$. Je-li $x_{j_0} = 0$, a tedy $y_{j_0} = 1$ nebo 2 , pak $F_C(x) \leq q + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{-j} = q + 2^{-j_0} \leq F_C(y)$. Pokud $x_{j_0} = 1$ a $y_{j_0} = 2$, pak $F_C(x) = q + 2^{-j_0} \leq F_C(y)$. Tím je ověřeno, že F_C je neklesající.

Nyní ukážeme spojitost F_C . Pokud $x, y \in [0, 1]$ náleží témuž triadickému intervalu $[k3^{-j}, (k+1)3^{-j}]$, pak $|F_C(y) - F_C(x)| \leq 2^{-j}$. Platí-li $|x - y| \leq 3^{-j}$, pak x, y patří do téhož nebo do dvou sousedních triadických intervalů délky 3^{-j} , a tedy $|F_C(y) - F_C(x)| \leq 2^{-j+1}$. Tedy F je (stejněměrně) spojitá.

Konečně ukážeme, že $\mu_C([0, 1] \setminus C) = 0$. Množinu $[0, 1] \setminus C$ lze zapsat jako spočetné sjednocení otevřených triadických intervalů, které lze popsat v triadickém rozvoji jako množina posloupností, které mají (nutně) na daném j -tém místě jedničku, a předtím pouze nuly a dvojky. Na takových intervalech je ale funkce F_C z definice konstantní, tedy míra F_C těchto intervalů, i jejich sjednocení, je nulová.

Přednáška 14.12.2020

Pozn.: Každou konečnou borelovskou míru μ na \mathbb{R} lze rozložit na součet

$$\mu = \mu_a + \mu_c + \mu_d,$$

kde $\mu_a \ll \lambda$, μ_d je diskrétní a μ_c neatomická s vlastností $\mu_c \perp \lambda$.

Tvrzení 14.3 *Nechť distribuční funkce F konečné míry μ má všude vlastní derivaci $F' =: f$. Pak $\mu \ll \lambda$ a $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$.*

Důkaz: Označme $\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}^1 : \mu(B) = \int_B f(x) dx\}$. Z vlastnosti

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

plyne, že \mathcal{D} obsahuje všechny intervaly typu $(a, b]$. Protože systém těchto intervalů je uzavřen na konečné průniky a generuje borelovskou σ -algebru, a protože \mathcal{D} je Dynkinův systém, je $\mathcal{D} = \mathcal{B}^1$, a tedy f je Radon-Nikodymova hustota μ vzhledem k λ^1 . \square

Pozn.:

1. Podmínka existence derivace distribuční funkce všude není nutná pro absolutní spojitost (vzhledem k λ). Např.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

je distribuční funkcí absolutně spojitě míry $\mu(\cdot) = \lambda(\cdot \cap (0, 1))$.

2. Každá monotónní funkce, a tedy i každá distribuční funkce, má derivaci v λ -skoro všech bodech.
3. Nutnou a postačující podmínkou pro absolutní spojitost $\mu \ll \lambda$ je *absolutní spojitost* distribuční funkce F : pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x_1 < y_1 < \dots < x_n < y_n$ platí

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta \implies \sum_{i=1}^n |F(y_i) - F(x_i)| < \varepsilon.$$

K důkazu slouží Tvrzení 12.2 (které platí i bez předpokladu konečnosti referenční míry μ). Je-li distribuční funkce F absolutně spojitá, pak podmínka z Tvrzení 12.2 je splněna pro všechny množiny z algebry \mathcal{A}_0 generované intervaly typu $(a, b]$, je ale potřeba ukázat, že platí pro všechny borelovské množiny.

Definice 14.3 (Lebesgue-Stieltjesův integrál) Je-li F distribuční funkce konečné míry μ a $f \in L^1(\mu)$, píšeme

$$\int f(x) dF(x) := \int f(x) d\mu(x).$$

Je-li navíc $a < b$, značíme

$$\int_a^b f(x) dF(x) := \int_{(a,b]} f(x) d\mu(x).$$

Věta 14.4 (Per partes pro Lebesgue-Stieltjesův integrál) Jsou-li F, G dvě distribuční funkce a $a < b$, platí

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b F(x_-) dG(x) + \int_a^b G(x) dF(x),$$

kde $F(x_-) := \lim_{y \rightarrow x^-} F(y)$.

Důkaz: S využitím Fubiniho věty dostaneme

$$\begin{aligned} (F(b) - F(a))(G(b) - G(a)) &= \int_{(a,b]^2} d(\mu_F \otimes \mu_G) \\ &= \int_a^b \int_a^b \chi_{\{x < y\}} dF(x) dG(y) + \int_a^b \int_a^b \chi_{\{x \geq y\}} dG(y) dF(x) \\ &= \int_a^b \int_{(a,y)} dF(x) dG(y) + \int_a^b \int_a^x dG(y) dF(x) \\ &= \int_a^b (F(y_-) - F(a)) dG(y) + \int_a^b (G(x) - G(a)) dF(x) \\ &= \int_a^b F(x_-) dG(x) + \int_a^b G(x) dF(x) - F(a)(G(b) - G(a)) - G(a)(F(b) - F(a)), \end{aligned}$$

a odečtením dostaneme dokazovanou rovnost. \square

Příklady:

1. Mají-li F i G derivaci na \mathbb{R} , dostaneme z věty 14.4 a tvrzení 14.3

$$[FG]_a^b = \int_a^b F(x)G'(x) dx + \int_a^b F'(x)G(x) dx,$$

což je klasický vzorec per partes.

2. Pro Cantorovu funkci F_C platí symetrie $F_C(1-x) = 1 - F_C(x)$, $x \in (0, 1)$, z čehož snadno dostaneme $\int_0^1 F_C(x) dx = \frac{1}{2}$. Použitím vzorce per partes pak dostaneme

$$1 = \int_0^1 x dF_C(x) + \int_0^1 F_C(x) dx,$$

tedy $\int_0^1 x dF_C(x) = \frac{1}{2}$.

Pozn.: Lebesgue-Stieltjesův integrál lze definovat i podle rozdílu dvou distribučních funkcí, což jsou zprava spojitě *funkce s konečnou variací*.