Přednáška 3.10.2023

1 Úvod

Připomenutí: Riemannův, Newtonův integrál, geometrický význam plochy pod grafem.

Ne všechny funkce jsou "integrovatelné", ne všechny množiny "měřitelné".

úplnost: Na prostoru Riemannovsky integrovatelných funkcí na untervalu I definujme skalární součin vztahem $\langle f, g\rangle := \int_I f \cdot g$. Indukovaný metrický prostor není úplný.

spočetná aditivita: V teorii pravděpodobnosti potřebujeme, aby pravděpodobnostní míra byla spočetně aditivní, tedy aby pro po dvou disjunktní náhodné jevy $A_1, A_2, \dots$ platilo $\Pr(\bigcup_i A_i) = \sum_i \Pr(A_i)$. Toto by pro míru definovanou pomocí Riemannova integrálu neplatilo.

Obecná konstrukce: nejprve míra (množinová funkce), z ní je odvozen integrál (aproximace po částech konstantními funkcemi).

Vlastnosti, které chceme po "míře":

(1) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) \geq 0\ \forall A$,

(2) $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ pro po dvou disjunktní množiny $A_1, A_2, \dots$.

Problém - které množiny jsou "měřitelné", neboli $\mathcal{D}\mu = ?$

Věta 1.1. *Neexistuje $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ splňující (1), (2) a*

(3) $\mu(I) = délka(I)$ pro každý interval I,

(4) $\mu(A + x) = \mu(A)$, $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Předpokládejme pro spor, že takové zobrazení μ existuje. Uvažujme ekvivalenci na $\mathbb{R}$

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Množina $A \subset [0, 1]$ nechť obsahuje právě jeden prvek z každé třídy ekvivalence $\sim$ (používáme axiom výběru!). Buď dále $\mathbb{Q} \cap [-1, 1] = \{q_1, q_2, \dots\}$ očíslování racionálních čísel v intervalu $[-1, 1]$. Nyní platí:

(a) $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A + q_i) \supset [0, 1]$ (protože pro každý $x \in [0, 1]$ existuje $a \in A$ takové, že $x - a \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, tedy $x - a = q_i$ pro nějaké i, čili $x \in A + q_i$),

(b) $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A + q_i) \subset [-1, 2]$,

(c) množiny $A + q_i$ jsou po dvou disjunktní ($i = 1, 2, \dots$) (kdyby ne, pak by A obsahovala dva ekvivalentní prvky).

Z (2), (4) a (c) plyne, že $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A + q_i)) = \infty$ jakmile $\mu(A) > 0$, což by bylo v rozporu s (b). Musí tedy být $\mu(A) = 0$. Pak ale i $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A + q_i)) = 0$, což podle (a) a (3) znamená $0 > \mu([0, 1]) = 1$, tedy spor. $\square$

2 Prostor s mírou

Buď X libovolná neprázdná množina. Symbolem $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ značíme potenční množinu množiny X.

Definice 2.1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je *σ-algebra* na X, jestliže

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(iii) $A_i \in \mathcal{A},\ i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je *algebra*, splňuje-li (1), (2) a

(iii') $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$.

Pozn.: Algebra je uzavřená na konečné množinové operace (průnik, sjednocení, rozdíl), σ-algebra na spočetné množinové operace.

Příklady:

- $\{\emptyset, X\}$, $\mathcal{P}(X)$ jsou σ-algebry na X.
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ je σ-algebra na $X = \{1,2,3\}$.
- $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ konečná nebo } \mathbb{N} \setminus A \text{ konečná}\}$ je algebra na $\mathbb{N}$, ale není to σ-algebra.

Věta 2.1. *Buďte $\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in I$ σ-algebry na množině X, přitom I je libovolná indexová množina. Pak $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ je σ-algebra na X.*

Důkaz: Plyne jednoduše z definice. □

Důsledek 2.2. *Pro libovolný množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ existuje nejmenší σ-algebra $\sigma\mathcal{S}$ obsahující $\mathcal{S}$.*

Důkaz: Položme

$$\sigma\mathcal{S} := \bigcap \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{S} \subset \mathcal{A},\ \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra}\}.$$

□

Definice 2.2. Buď (X, ρ) metrický prostor a $\mathcal{G}$ systém všech otevřených podmnožin X. Pak $\mathcal{B}(X) := \sigma\mathcal{G}$ nazýváme *borelovskou σ-algebrou* na X.

Příklad: Následující množinové systémy spadají do borelovské σ-algebry:

- $\mathcal{F}$ - systém uzavřených množin
- $\mathcal{G}_\delta$ - spočetné průniky otevřených množin
- $\mathcal{F}_\sigma$ - spočetná sjednocení uzavřených množin
- $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ - spočetná sjednocení množin z $\mathcal{G}_\delta$
- ...

Pozn.: Je obtížné popsat třídu borelovských množin konstruktivně (je třeba transfinitní indukce).

Pozn.: Ne všechny množiny jsou borelovské. Platí dokonce

$$\operatorname{card} \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} = \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

tedy neborelovských podmnožin $\mathbb{R}$ je více než borelovských.

Definice 2.3. $(X, \mathcal{A})$ je *měřitelný prostor*, jestliže X je neprázdná množina a $\mathcal{A}$ je σ-algebra na X.
μ je *míra* na $(X, \mathcal{A})$, jestliže $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ splňuje

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní ($i \in \mathbb{N}$) $\implies$ $\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$ (σ-aditivita).

Trojici $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nazýváme *prostor s mírou*.

Pozn.: Z vlastnosti (b) a z nezápornosti plyne monotonie míry: $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$.

Příklady:

- $\mu(A) = 0 \; \forall A \in \mathcal{P}(X)$ - nulová míra ($\mu = 0$)
- pro $x \in X$ pevný položme

  $$\delta_x(A) = \begin{cases} 0 & x \notin A, \\ 1 & x \in A. \end{cases}.$$

  δ_x se nazývá *Diracova míra* v bodě x.
- Míra

  $$\mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card}(A) & A \subset X \text{ konečná}, \\ \infty & A \subset X \text{ nekonečná}. \end{cases}$$

  se nazývá *aritmetická míra* na X.

Věta 2.3 (Spojitost míry)**.** *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$.*

1. $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \implies \mu(A_i) \nearrow \mu(\bigcup_i A_i)$,
2. $\mu(A_1) < \infty$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \implies \mu(A_i) \searrow \mu(\bigcap_i A_i)$.

Důkaz: 1. Nechť $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \nearrow A$. Pak $A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots$ je disjunktní rozklad na měřitelné množiny, tedy $\mu(A) = \mu(A_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1})$. Zároveň $\mu(A_i) = \mu(A_1) + \sum_{j=2}^{i} \mu(A_j \setminus A_{j-1})$, takže $\mu(A_i) \nearrow \mu(A)$, $i \to \infty$.

2. Nechť $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \searrow A$, $\mu(A_1) < \infty$. Položme $B_i := A_1 \setminus A_i$, $i \in \mathbb{N}$. Zřejmě platí $B_i \nearrow B := A_1 \setminus A$, tedy $\mu(A_1) - \mu(A_i) = \mu(B_i) \nearrow \mu(B) = \mu(A_1) - \mu(A)$, a odečtením výrazu $\mu(A_1) < \infty$ dostaneme $\mu(A_i) \searrow \mu(A)$. $\square$

Přednáška 10.10.2023

Definice 2.4. Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Řekneme, že $N \subset X$ je *nulová množina*, jestliže existuje $A \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(A) = 0$ a $N \subset A$. Symbolem $\mathcal{N}$ značíme systém všech nulových množin. dále značíme

$$\mathcal{A}_0 := \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$$

zúplněnou σ-algebru $\mathcal{A}$ vzhledem k míře μ.

Pozn: $\mathcal{N}$ je *σ-ideál*, tedy systém množin uzavřený na podmnožiny a spočetná sjednocení.

Věta 2.4 (Zúplnění míry)**.** *Je dán prostor s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pak platí:*

1. $\mathcal{A}_0 = \{B \subset X : \exists A \in \mathcal{A}, B \triangle A \in \mathcal{N}\}$ *(symbolem $\triangle$ značíme symetrickou diferenci množin).*
2. *Míru μ lze jednoznačně rozšířit na prostor $(X, \mathcal{A}_0)$ (značíme opět μ).*
3. *V prostoru $(X, \mathcal{A}_0, \mu)$ jsou všechny nulové množiny měřitelné.*

Důkaz: 1. Označme $\overline{\mathcal{A}}_0 := \{B \subset X : \exists A \in \mathcal{A}, B \triangle A \in \mathcal{N}\}$. Ukážeme nejprve, že $\overline{\mathcal{A}}_0$ je σ-algebra. Zřejmě platí $\emptyset, X \in \overline{\mathcal{A}}_0$. Je-li $B \in \overline{\mathcal{A}}_0$, pak $A \triangle B \in \mathcal{N}$ pro nějakou $A \in \mathcal{A}$, a tedy také $X \setminus B \in \overline{\mathcal{A}}_0$, protože $(X \setminus B) \triangle (X \setminus A) = B \triangle A \in \mathcal{N}$ a $X \setminus A \in \mathcal{A}$. Dále, jsou-li $B_i \in \overline{\mathcal{A}}_0$, $i \in \mathbb{N}$, pak $B_i \triangle A_i \in \mathcal{N}$ pro nějaké $A_i \in \mathcal{A}$, a tedy také $\bigcup_i B_i \in \overline{\mathcal{A}}_0$, protože $(\bigcup_i B_i) \triangle (\bigcup_i A_i) \subset \bigcup_i (B_i \triangle A_i) \in \mathcal{N}$. $\overline{\mathcal{A}}_0$ je tedy σ-algebra. Pak ale ze zřejmé inkluze $\mathcal{A} \cup \mathcal{N} \subset \overline{\mathcal{A}}_0$ plyne $\mathcal{A}_0 = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}) \subset \sigma \overline{\mathcal{A}}_0 = \overline{\mathcal{A}}_0$. Opačná inkluze je snadná: je-li $B \in \overline{\mathcal{A}}_0$, pak $B \triangle A \in \mathcal{N}$ pro nějakou $A \in \mathcal{A}$, tedy $B = A \cup (B \setminus A) \setminus (A \setminus B)$, přitom $B \setminus A$ i $A \setminus B$ leží v $\mathcal{N}$, tedy nutně $B \in \mathcal{A}_0$.

2. Je-li $B \in \mathcal{A}_0$ a $A \in \mathcal{A}$ taková, že $B \triangle A \in \mathcal{N}$, položíme $\mu(B) := \mu(A)$. Nejprve musíme ukázat, že toto rozšíření je korektní, tedy že nezávisí na volbě A. Je-li $A' \in \mathcal{A}$ jiná množina s vlastností $B \triangle A' \in \mathcal{N}$, pak z inkluzí $A \setminus A' \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A') \in \mathcal{N}$ a $A' \setminus A \subset (A' \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{N}$ plyne $\mu(A \setminus A') = \mu(A' \setminus A) = 0$, a tedy $\mu(A) = \mu(A')$. Definice je tedy korektní. Ukážeme, že takto dodefinovaná množinová funkce μ je σ-aditivní. Buď (B_i) posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}_0$, označme $B := \bigcup_{i=1}^\infty B_i$, a buďte $A_i \in \mathcal{A}$ takové, že $B_i \triangle A_i \in \mathcal{N}$. Položme $C_1 := A_1$, $C_i := A_i \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{i-1})$, $i = 2, 3 \ldots$, $C := \bigcup_{i=1}^\infty C_i$. Pak (C_i) je posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}$, tedy $\mu(C) = \sum_{i=1}^\infty \mu(C_i)$. Protože množiny $C_i \triangle B_i$ a $C \triangle B$ jsou nulové, platí $\mu(B_i) = \mu(C_i)$, $i \in \mathbb{N}$, a $\mu(B) = \mu(C)$, a tedy také $\mu(B) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i)$. Tím je dokázáno, že μ je σ-aditivní na $\mathcal{A}_0$, a je to tedy míra.

3. Buď $M \subset X$ nulová v $(X, \mathcal{A}_0, \mu)$. Ukážeme, že $M \in \mathcal{N}$ (tedy že M je nulová i v původním prostoru $(X, \mathcal{A}, \mu)$), a tedy $M \in \mathcal{A}_0$. K množině M existuje $B \in \mathcal{A}_0$, $M \subset B$, $\mu(B) = 0$. Z definice rozšířené míry μ dále existuje $A \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(A) = 0$ a $B \setminus A \in \mathcal{N}$, tedy existuje $N \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(N) = 0$ a $B \setminus A \subset N$. Pak ale $M \subset B \subset A \cup N \in \mathcal{A}$ a $\mu(A \cup N) = 0$, tedy $M \in \mathcal{N}$. $\square$

Definice 2.5. (i) μ je *borelovská míra* na metrickém prostoru X, je-li to míra na $(X, \mathcal{B}(X))$.

(ii) Míra μ na $(X, \mathcal{A})$ je *konečná*, jestliže $\mu(X) < \infty$.

(iii) Míra μ na $(X, \mathcal{A})$ je *σ-konečná*, jestliže existují $E_n \in \mathcal{A}$ takové, že $X = \bigcup_n E_n$ a $\mu(E_n) < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Věta 2.5 (Lebesgueova míra)**.** *Existuje právě jedna borelovská míra λ^n na $\mathbb{R}^n$ taková, že pro všechna $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$, platí*

$$\lambda^n([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Lebesgueova míra je regulrární v následujícím smyslu. Nechť $\mathcal{B}_0^n$ značí zúplněnou borelovskou σ-algebru $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Pak pro každou $E \in \mathcal{B}_0^n$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují otevřená množina G a uzavřená množina F takové, že $F \subset E \subset G$ a $\lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon$.

[Důkaz bude v navazující přednášce.]

Poznámky:

1. Lebesgueova míra je zřejmě σ-konečná.
2. Platí $\mathcal{B}^n \subsetneq \mathcal{B}_0^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (bez důkazu).

3 Měřitelné funkce

Věta 3.1. *Uvažujme zobrazení $f : X \to Y$.*

(i) *Je-li $\mathcal{B}$ σ-algebra na Y, pak $f^{-1}\mathcal{B} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ je σ-algebra na X.*

(ii) *Pro libovolný množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ platí $\sigma(f^{-1}\mathcal{S}) = f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$.*

Důkaz: (i) se snadno dokáže s využitím faktu, že vzor množiny komutuje s množinovými operacemi. Konkrétně platí $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ a $\bigcup_i f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\bigcup_i B_i)$, kdykoliv $B, B_1, B_2, \dots \subset Y$.

(ii). Zřejmě $f^{-1}\mathcal{S} \subset f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$, a tedy $\sigma(f^{-1}\mathcal{S}) \subset \sigma(f^{-1}(\sigma\mathcal{S})) = f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$, protože $f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$ je σ-algebra podle části (i). Pro důkaz opačné inkluze označme množinový systém

$$\mathcal{A} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}\mathcal{S})\}.$$

Je snadné ověřit, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra. Dále zřejmě $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, a tedy také $\sigma\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, tudíž $f^{-1}(\sigma\mathcal{S}) \subset f^{-1}\mathcal{A} \subset \sigma(f^{-1}\mathcal{S})$, kde poslední inkluze plyne přímo z definice systému $\mathcal{A}$. $\square$

Definice 3.1. Buďte $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{B})$ měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ je *měřitelné* (vzhledem k $\mathcal{A}, \mathcal{B}$), jestliže $f^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Píšeme pak $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$. Je-li některý z prostorů X, Y metrickým prostorem, pak za příslušnou σ-algebru bereme borelovskou σ-algebru. Měřitelné zobrazení mezi dvěma metrickými prostory nazýváme *borelovsky měřitelné* nebo stručně *borelovské.*

Pozn.:

1. Složení dvou měřitelných zobrazení je zřejmě měřitelné.
2. Jsou-li $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{B})$ měřitelné prostory a $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ libovolný generátor σ-algebry $\mathcal{B}$ (tzn. platí-li $\sigma\mathcal{S} = \mathcal{B}$), pak $f : X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$. (Plyne z Věty 3.1.)
3. Je-li $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor a Y metrický prostor, pak zobrazení $f : X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ pro každou otevřenou množinu $G \subset Y$.

Tvrzení 3.2. *Každé spojité zobrazení mezi dvěma metrickými prostory je borelovsky měřitelné.*

Důkaz: Plyne přímo z předchozí poznámky a z faktu, že f je spojité právě tehdy, když vzory otevřených množin jsou otevřené. $\square$

Věta 3.3. *Borelovská σ-algebra $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ je generovaná*

1. *otevřenými kvádry (tj. množinami $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \ldots, n$;*
2. *systémem $\mathcal{S} = \{(-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$.*

Speciálně, $\mathcal{B}^1 = \sigma\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

Důkaz: 1. Plyne přímo z faktu, že každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako spočetné sjednocení otevřených kvádrů. Skutečně, označíme-li symbolem $\mathcal{Q}$ systém všech otevřených kvádrů v $\mathbb{R}^n$ s racionálními krajními body, pak lze psát

$$G = \bigcup\{I \in \mathcal{Q} : I \subset G\}.$$

K ověření vlastnosti 2. stačí ukázat, že každý otevřený kvádr leží v $\sigma\mathcal{S}$. Ověříme tuto vlastnost v $\mathbb{R}^2$ (případ obecné dimenze je zcela analogický). Pro otevřený kvádr $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ můžeme psát

$$I = ((-\infty, b_1) \times (-\infty, b_2)) \setminus ((-\infty, a_1] \times (-\infty, b_2)) \setminus ((-\infty, b_1) \times (-\infty, a_2]),$$

přitom

$$(-\infty, a_1] \times (-\infty, b_2) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (-\infty, a_1 + i^{-1}) \times (-\infty, b_2) \in \sigma\mathcal{S},$$

a analogicky pro $(-\infty, b_1) \times (-\infty, a_2]$. $\square$

Pozn.: Jako generátor $\mathcal{B}^n$ lze vzít rovněž uzavřené či polouzavřené kvádry. Navíc stačí vzít pouze kvádry s racionálními koncovými body.

Důsledek 3.4. *Funkce $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ je měřitelná právě tehdy, když množina $\{f < a\} := \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ pro všechna $a \in \mathbb{R}$ (případně stačí pro všechna $a \in \mathbb{Q}$).*

Věta 3.5.

1. *Jsou-li $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ a $g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^m$ měřitelná zobrazení, pak i $(f, g) : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^{n+m}$ je měřitelné.*
2. *Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ měřitelná, jsou i $f + g$ a $f - g$ měřitelná.*
3. *Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, jsou i $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ měřitelné.*

Důkaz: 1. Každý otevřený kvádr $I \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je tvaru $I = U \times V$, kde $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené kvádry. Pak platí

$$(f, g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \in \mathcal{A},$$

a tedy (f, g) je měřitelné podle Věty 3.3.

2. Měřitelnost $f + g$ plyne z toho, že součet funkcí můžeme psát jako složení

$$f + g = + \circ (f, g),$$

kde $+ : (x, y) \mapsto x + y$ je operace sčítání v $\mathbb{R}^n$ a $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$ je spojení zobrazení z prvního tvrzení. Měřitelnost složení pak plyne z měřitelnosti obou komponent. Měřitelnost zbývajících zobrazení (funkcí) se ukáže analogicky. □

Přednáška 17.10.2023

Důsledek 3.6. *Jsou-li* $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ *měřitelné funkce, pak leží množiny* $\{f \le g\}$, $\{f < g\}$ *a* $\{f = g\}$ *v* σ*-algebře* $\mathcal{A}$.

Budeme značit $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $\mathcal{B}^* := \sigma(\mathcal{B}^1 \cup \{\{-\infty\}, \{\infty\}\})$. $\mathcal{B}^*$ je rovněž generována intervaly, např.

$$\mathcal{B}^* = \sigma\{[-\infty, b] : b \in \mathbb{R}^*\},$$

a předchozí tvrzení pro reálné měřitelné funkce platí i pro "numerické" měřitelné funkce s hodnotami v $\mathbb{R}^*$.

Věta 3.7. *Buďte* $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ *měřitelné,* $n \in \mathbb{N}$. *Pak jsou funkce* $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ *a* $\liminf_{n\to\infty} f_n$ *rovněž měřitelné.*

Důkaz: Označme $g := \sup_n f_n$. Pak pro libovolné $b \in \mathbb{R}^*$ platí

$$g^{-1}([-\infty, b]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \le b\} \in \mathcal{A},$$

tedy g je měřitelná, neboť intervaly $[-\infty, b]$: $b \in \mathbb{R}^*$ generují $\mathcal{B}^*$. Dále označme $h := \limsup_{n\to\infty} f_n$. Pak pro libovolné $b \in \mathbb{R}^*$ platí

$$\begin{aligned} h^{-1}([-\infty, b]) &= \{x \in X : (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \ge n_0) : f_n(x) \le b + \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \{f_n \le b + \frac{1}{k}\} \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

tedy i h je měřitelná. Případ infima a liminf je analogický. □

Pozn.: Z předchozí věty plyne, že limita měřitelných funkcí je měřitelná, pokud existuje.

Definice 3.2. Funkce $s : X \to [0, \infty)$ je *jednoduchá*, jestliže $s(X)$ je konečná množina.

Věta 3.8. *Je-li* $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ *měřitelná, existují funkce* $s_n : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty)$ *jednoduché měřitelné takové, že* $s_n \nearrow f$ $(n \to \infty)$.

Důkaz: Položme

$$s_n(x) := \max\left\{\frac{k}{2^n} : \frac{k}{2^n} \le f(x),\, k = 0, 1, \ldots, n2^n\right\}, \quad x \in X.$$

Funkce s_n jsou zřejmě nezáporné a nabývají jen konečně mnoha hodnot. Ověříme měřitelnost. Z definice platí

$$\{s_n < a\} = \{f < \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{A}$$

kdykoliv $\frac{k-1}{2^n} < a \le \frac{k}{2^n}$, $1 \le k \le n2^n$, $n \in \mathbb{N}$, a $\{s_n < a\} = \emptyset$ pro $a \le 0$ a $\{s_n < a\} = X$ pro $a > n$. Tedy s_n jsou měřitelné.

Není těžké ověřit, že s_n tvoří neklesající posloupnost a že $s_n \nearrow f$. □

4 Abstraktní Lebesgueův integrál

Pro podmnožinu $E \subset X$ značíme symbolem χ_E *indikátorovou funkci* množiny E, tedy

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E. \end{cases}.$$

Pozn.: Každá jednoduchá funkce má jednoznačné vyjádření v tzv. *kanonickém tvaru*:

$$s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j},$$

kde $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ jsou všechny různé hodnoty funkce s; pak $X = E_1 \cup \dots \cup E_k$ je rozklad prostoru X. Je-li s měřitelná, jsou $E_i \in \mathcal{A}$.

Definice 4.1. Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

(a) Je-li $s : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty)$ jednoduchá měřitelná v kanonickém tvaru $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}$, klademe

$$\int_X s \, d\mu = \int_X s(x) \, d\mu(x) := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(E_j).$$

(Je-li některé $\alpha_j = 0$, klademe $\alpha_j \mu(E_j) = 0$, tedy používáme konvenci $0 \cdot \infty = 0$.)

(b) Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ měřitelná, klademe

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X s \, d\mu : \ 0 \le s \le f, \ s \text{ jedn. měř.} \right\}.$$

(c) Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelná, klademe

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu,$$

má-li rozdíl smysl. (Zde f^+, f^- značí kladnou, resp. zápornou část funkce f.)

Pozn.:

1. Je-li f měřitelná a $E \in \mathcal{A}$, značíme

$$\int_E f \, d\mu := \int_X (f \cdot \chi_E) \, d\mu.$$

   Místo $\int_X f \, d\mu$ píšeme také pouze $\int f \, d\mu$.

2. Je-li f měřitelná taková, že $\int f^+ \, d\mu = \int f^- \, d\mu = \infty$, pak $\int f \, d\mu$ není definován. Říkáme proto, že (abstraktní) Lebesgueův integrál je *absolutně konvergentní* (na rozdíl od Newtonova integrálu).

Cvičení: Je-li $s = \sum_{j=1}^{l} \beta_j \chi_{F_j}$ nějaké (ne nutně kanonické) vyjádření jednoduché měřitelné funkce s, pak také platí

$$\int_X s\,d\mu = \sum_{j=1}^{l} \beta_j \mu(F_j).$$

Tvrzení 4.1 (Monotonie integrálu)**.** *Pro $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelné s vlastností $0 \le f \le g$ platí $0 \le \int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu$.*

Věta 4.2 (Leviho věta)**.** *Jsou-li f_n nezáporné měřitelné funkce na X takové, že $f_n \nearrow f$, platí $\int_X f_n\,d\mu \nearrow \int f\,d\mu$ $(n \to \infty)$.*

Důkaz: Označme $a_n := \int f_n\,d\mu \in [0, \infty]$, $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ (posloupnost (a_n) je neklesající podle předchozího tvrzení). Zřejmě platí nerovnost $a \le \int f\,d\mu$. Ukážeme, že také $a \ge \int f\,d\mu$.

Je-li $a = \infty$, nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy dále, že $a < \infty$. Ukážeme, že $a \ge \int s\,d\mu$ pro každou jednoduchou měřitelnou funkci $s \le f$. Pak bude i $a \ge \int f\,d\mu$ podle definice integrálu.

Buď tedy $0 \le s \le f$ jednoduchá měřitelná funkce. Zvolme $0 < \tau < 1$ a označme

$$E_n := \{x \in X : f_n(x) \ge \tau s(x)\}.$$

Zřejmě $E_n \in \mathcal{A}$, $E_n \subset E_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, a $\bigcup_n E_n = X$. Podle věty o spojitosti míry platí

$$\mu(A \cap E_n) \nearrow \mu(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Zapišme s ve tvaru $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}$, kde $X = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ je rozklad prostoru X. Pak platí

$$\begin{aligned}\int_X f_n\,d\mu &\ge \int_{E_n} f_n\,d\mu \ge \int_{E_n} (\tau s)\,d\mu = \int (\tau s \chi_{E_n})\,d\mu \\ &= \tau \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(A_j \cap E_n) \to \tau \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(A_j) = \tau \int s\,d\mu, \quad n \to \infty,\end{aligned}$$

a tedy

$$a = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \ge \tau \int s\,d\mu.$$

Protože nerovnost platí pro libovolné $\tau \in (0, 1)$, platí i $a \ge \int s\,d\mu$, a důkaz je hotov. $\square$

Věta 4.3 (Fatouovo lemma)**.** *Pro funkce f_n nezáporné měřitelné na X platí*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Důkaz: Označme $g_n(x) := \inf\{f_k(x) : k \geq n\}$, $x \in X$. Funkce g_n jsou měřitelné (Věta 3.7) a platí $g_n \nearrow g := \liminf_{n\to\infty} f_n$ (z definice lim inf). Podle Leviho věty platí $\int g_n \, d\mu \nearrow \int g \, d\mu$. Dále zřejmě $g_n \leq f_n$, a tedy $\int g_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu$, $n \in \mathbb{N}$, a limitním přechodem dostaneme $\int g \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$.
□

Přednáška 24.10.2023

Definice 4.2. Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Řekneme, že vlastnost $V(x)$ mají (μ-)*skoro všechny* body $x \in X$ (zkráceně *s.v.*), jestliže $\{x \in X : \neg V(x)\}$ je (μ-)nulová množina.

Tvrzení 4.4. *Nechť f, g jsou měřitelné funkce na X takové, že $f = g$ s.v. Pak platí*

$$\int f\, d\mu = \int g\, d\mu, \text{ má-li jedna strana smysl.}$$

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že f i g jsou nezáporné funkce. Je-li $s \leq f$ libovolná měřitelná jednoduchá funkce, pak $s' := s\chi_{\{f=g\}}$ je rovněž jednoduchá měřitelná a splňuje $s' \leq g$ a $\int s\, d\mu = \int s'\, d\mu$. Musí tedy být $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$. Obrácená nerovnost plyne ze symetrie. Bez předpokladu nezápornosti ukážeme rovnost integrálu z kladných a záporných částí (platí totiž zřejmě také $f^+ = g^+$ s.v. a $f^- = g^-$ s.v.). $\square$

Pozn.: Pro účely integrálu stačí, aby funkce byla definována skoro všude.

Cvičení:

1. Nechť je prostor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *úplný*. Pak z rovnosti $f = g$ s.v. plyne

$$f \text{ je měřitelná} \iff g \text{ je měřitelná.}$$

2. Při zúplnění prostoru s mírou se integrály definované v původním prostoru nemění.

Definice 4.3. Označme

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^*(\mu) &:= \left\{ f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^* \text{ měř.} : \int f\, d\mu \text{ je definován} \right\}, \\
\mathcal{L}^1(\mu) &:= \left\{ f \in \mathcal{L}^*(\mu) : \int |f|\, d\mu < \infty \right\}.
\end{aligned}$$

Věta 4.5 (Linearita integrálu)**.** *Jsou-li funkce $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak platí*

$$\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu, \quad \int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu,$$

má-li pravá strana smysl.

Pozn.: Z předpokladu existence $\int f\, d\mu + \int g\, d\mu$ plyne, že nemůže nastat, aby jedna z funkcí nabývala hodnoty ∞ a druhá hodnoty $-\infty$ na množině kladné míry. Součet $f + g$ je tedy definovám skoro všude.

Důsledek 4.6. *Zobecněný Lebesgueův integrál je tedy lineární funkcionál na vektorovém prostoru $\mathcal{L}^1(\mu)$.*

Důkaz: (i) Je-li $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ pak i $\alpha f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\int (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu$ (cvičení).

(ii) Buďte f, g nezáporné jednoduché měřitelné, v kanonickém vyjádření $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{E_i}$, $g = \sum_{j=1}^{l} \beta_j \chi_{F_j}$. Pak jejich součet můžeme zapsat jako

$$f + g = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{E_i \cap F_j},$$

což je zřejmě opět jednoduchá měřitelná funkce. Její vyjádření výše nemusí být kanonický tvar, ale sloučíme-li dvojice indexů (i, j), pro něž je $\alpha_i + \beta_j$ stejné, dostaneme kanonický tvar, a zřejmě podle definice je tedy

$$\int (f + g)\, d\mu = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (\alpha_i + \beta_j) \mu(E_i \cap F_j).$$

Z aditivity míry dostaneme $\mu(E_i) = \sum_{j=1}^{l} \mu(E_i \cap F_j)$, $i = 1, \ldots, k$, a podobně $\mu(F_j) = \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i \cap F_j)$, $j = 1, \ldots, l$, a proto také podle definice

$$\int f\, d\mu + \int g\, d\mu = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (\alpha_i + \beta_j) \mu(E_i \cap F_j) = \int (f + g)\, d\mu.$$

(iii) Jsou li f, g nezáporné měřitelné, pak podle Věty 3.8 existují jednoduché měřitelné funkce s_n, t_n takové, že $s_n \nearrow f$ a $t_n \nearrow g$, tedy $\int s_n\, d\mu \nearrow \int f\, d\mu$ a $\int t_n\, d\mu \nearrow \int g\, d\mu$ podle Leviho věty. Ze stejného důvodu platí i $\int (s_n + t_n)\, d\mu \nearrow \int (f + g)\, d\mu$. Víme již, že $\int (s_n + t_n)\, d\mu = \int s_n\, d\mu + \int t_n\, d\mu$, a limitním přechodem $(n \to \infty)$ dostaneme požadovanou rovnost.

(iv) Buďte nyní $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ libovolné. Platí

$$f + g = (f + g)^+ - (f + g)^- = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-),$$

tedy $(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$. Všechny zde vystupující funkce jsou nezáporné, tudíž platí

$$\int (f + g)^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu + \int g^-\, d\mu = \int (f + g)^-\, d\mu + \int f^+\, d\mu + \int g^+\, d\mu.$$

Aby měl součet integrálů $\int f\, d\mu + \int g\, d\mu$ smysl, musí být buď $\int f^+\, d\mu < \infty$ a $\int g^+\, d\mu < \infty$, nebo $\int f^-\, d\mu < \infty$ a $\int g^-\, d\mu < \infty$. Uvažujme druhou z uvedených variant. Pak z nerovnosti $(f + g)^- \leq f^- + g^-$ plyne $\int (f^- + g^-)\, d\mu < \infty$ a odečtením všech integrálů ze záporných části ve výše uvedené rovnosti dostaneme požadovaný vztah $\int (f + g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$. V případě platnosti první varianty odečteme naopak integrály z kladných částí. □

Důsledek 4.7. *Pro nezáporné měřitelné funkce f_n na X platí*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Důkaz: Podle předchozí věty platí

$$\int \left(\sum_{k=1}^{n} f_n \right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f_k \, d\mu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Limitním přechodem a s využitím Leviho věty dostaneme tvrzení. $\square$

Tvrzení 4.8. $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \implies \left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$

Důkaz: Podle trojúhelníkové nerovnosti a definice integrálu platí

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \left| \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \right| \leq \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu = \int |f| \, d\mu.$$

$\square$

Cvičení:

1. $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu) \implies \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
2. Je-li funkce f měřitelná a $|f| \leq g$ pro nějakou funkci $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak i $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Věta 4.9 (Zobecněná Leviho věta)**.** *Buďte funkce f_n měřitelné na X ($n \in \mathbb{N}$) takové, že $f_n \nearrow f$ a $\int f_1 \, d\mu > -\infty$. Pak $\int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$.*

Důkaz: Je-li $\int f_1 \, d\mu = \infty$, tvrzení zřejmě platí. Nechť tedy $\int f_1 \, d\mu \in \mathbb{R}$. Protože $0 \leq f_n - f_1 \nearrow f - f_1$, podle Leviho věty platí $\int (f_n - f_1) \, d\mu \nearrow \int (f - f_1) \, d\mu$, a z aditivity integrálu dostaneme $\int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$. $\square$

Důsledek 4.10. *Jsou-li funkce f_n měřitelné, $f_n \searrow f$ a $\int f_1 \, d\mu < \infty$, pak $\int f_n \, d\mu \searrow \int f \, d\mu$.*

Důkaz. Použijte zobecněnou Leviho větu pro funkce $-f_n \nearrow -f$. $\square$

Věta 4.11 (Lebesgueova; o konvergentní majorantě)**.** *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, f měřitelné funkce takové, že $f_n \to f$ s.v. Nechť dále existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f_n| \leq g$ s.v. pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.*

Důkaz. Předefinujeme-li funkce f_n, f na množině

$$\{x : f_n(x) \not\to f(x)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : |f_n(x)| > g(x)\}$$

nulové míry, budou předpoklady věty platit pro všechna $x \in X$. Označme

$$g_n := \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, \quad h_n := \sup\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě platí

$$-g \leq g_n \leq f_n \leq h_n \leq g, \quad n \in \mathbb{N},$$

tedy $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, a $g_n \nearrow f$, $h_n \searrow f$, $n \to \infty$, tedy podle zobecněné Leviho věty platí $\int g_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ a $\int h_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$. Protože $\int g_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu \leq \int h_n \, d\mu$, platí také $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ podle věty o dvou strážnících. □

Důsledek 4.12. *Jsou-li f_i měřitelné, $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ konverguje s.v., a $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|\sum_{i=1}^{n} f_i| \leq g$ s.v. pro všechna n, pak $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a*

$$\int \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i \right) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, d\mu.$$

Přednáška 31.10.2023

5 Integrály závislé na parametru

V následujícím textu budeme pracovat s funkcemi $f : T \times X \to \mathbb{R}$. Symbolem $f(\cdot, x)$ a $f(t, \cdot)$ budeme rozumět vždy funkci jedné proměnné (znázorněné tečkou) při pevné hodnotě (parametru) druhé proměnné.

Věta 5.1 (Lebesgueova; o spojité závislosti integrálu na parametru)**.** *Buďte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, T metrický prostor a $f : T \times X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

(i) *$f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in T$,*

(ii) *$f(\cdot, x)$ je spojitá na T pro s.v. $x \in X$,*

(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f(t, \cdot)| \leq g$ s.v. pro všechna $t \in T$.*

Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in T$ a funkce

$$F : t \mapsto \int f(t, x)\, d\mu(x)$$

je spojitá na T.

Důkaz. Z předpokladu $|f(t, \cdot)| \leq g$ s.v. zřejmě plyne $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $t \in T$. Označme $N \subset X$ množinu nulové míry takovou, že $f(\cdot, x)$ je spojitá na T pro všechna $x \in X \setminus N$. Zvolíme-li libovolnou posloupnost $t_j \to t$ v T a libovolný $x \in X \setminus N$, platí podle Heineho věty $\lim_{j\to\infty} f(t_j, x) = f(t, x)$. Podle Lebesgueovy věty (o konvergentní majorantě) platí $\lim_{j\to\infty} F(t_j) = F(t)$. Toto platí pro každou posloupnost $t_j \to t \in T$, a tedy F je spojitá na T, opět podle Heineho věty. $\square$

Věta 5.2 (Záměna integrálu a derivace)**.** *Buďte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval a $f : I \times X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

(i) *$f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in I$,*

(ii) *existuje $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$, taková, že pro všechna $x \in X \setminus N$ a pro všechna $t \in I$ existuje vlastní derivace $\frac{d}{dt} f(t, x)$,*

(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že pro všechna $t \in I$, $|\frac{d}{dt} f(t, x)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in X$,*

(iv) *existuje $t_0 \in I$ takové, že $f(t_0, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.*

Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in I$, funkce

$$F : t \mapsto \int f(t, x)\, d\mu(x)$$

je diferencovatelná na I a platí

$$F'(t) = \int \frac{d}{dt} f(t, x)\, d\mu(x), \quad t \in I.$$

Důkaz. Pro libovolné $a, b \in I$, $a < b$, a $x \in X \setminus N$ existuje podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě $c_x \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f(b,x) - f(a,x)}{b-a} = \frac{d}{dt} f(c_x, x).$$

Z předpokladu (iii) plyne, že funkce $x \mapsto \frac{d}{dt} f(c_x, x)$ leží v prostoru $\mathcal{L}^1(\mu)$. Zvolíme-li za jeden z bodů a, b bod t_0, dostaneme $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in I$. Uvažujme nyní libovolnou posloupnost $t_j \to t \in I$, $I \ni t_j \neq t$. Platí

$$\lim_{j\to\infty} \frac{F(t_j) - F(t)}{t_j - t} = \lim_{j\to\infty} \int \frac{f(t_j, x) - f(t, x)}{t_j - t} \, d\mu(x) = \int \frac{d}{dt} f(t, x) \, d\mu(x);$$

poslední rovnost plyne z Lebesgueovy věty o konvergentní majorantě a z definice derivace. Protože uvedená rovnost platí pro libovolnou posloupnost $t_j \to t \in I$, $t_j \neq t$, dostáváme $F'(t) = \int \frac{d}{dt} f(t, x) \, d\mu(x)$, $t \in I$. □

6 Lebesgueova míra na přímce

Věta 6.1. *Je-li $f \geq 0$ měřitelná funkce na prostoru s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a platí-li $\int f \, d\mu = 0$, je $f = 0$ s.v.*

Důkaz. Označme $A_n := \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Zřejmě $A_n \in \mathcal{A}$, $\chi_{A_n} \leq nf$, a tedy $\mu(A_n) = \int \chi_{A_n} \, d\mu \leq n \int f \, d\mu = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Protože $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, platí $\mu(\{f > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$. □

Důsledek: Jsou-li $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f \leq g$ a $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$, pak $f = g$ s.v.

Důsledek 6.2. *Nechť pro funkci $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ platí $\int_E f \, d\mu = 0$ pro každou množinu $E \in \mathcal{A}$. Pak $f = 0$ s.v.*

Důkaz. Zvolme nejprve $E_+ := \{f > 0\}$. Pak podle předpokladu platí $\int f^+ \, d\mu = \int_{E_+} f \, d\mu = 0$, a protože $f^+ \geq 0$, je $f^+ = 0$ s.v. podle Věty 6.1. Podobně volbou $E_- := \{f < 0\}$ odvodíme, že $f^- = 0$ s.v. Pak ale musí být $f = 0$ s.v. □

Značení: Budeme uvažovat restrikci (zúplněné) Lebesgueovy míry λ^1 na omezený otevřený interval (a, b). Budeme značit $\mathcal{L}^1(a, b)$ příslušný prostor integrovatelných funkcí a $\int_a^b f \, d\lambda^1$ Lebesgueův integrál z funkce $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$. Dále symbolem $\mathcal{R}[a, b]$ značíme množinu všech omezených funkcí na $[a, b]$, pro něž existuje Riemannův integrál (R) $\int_a^b f$.

Věta 6.3 (Vztah Lebesgueova a Riemannova integrálu)**.** *Je-li $f \in \mathcal{R}[a, b]$, pak $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$ a* (R) $\int_a^b f = \int_a^b f \, d\lambda^1$.

Důkaz. Protože $f \in \mathcal{R}[a, b]$, existuje posloupnost $(\mathcal{D}_n)$ zjemňujících se dělení intervalu $[a, b]$ taková, že

$$\mathfrak{s}(f, \mathcal{D}_n) \nearrow \text{(R)} \int_a^b f \swarrow \mathscr{S}(f, \mathcal{D}_n), \quad n \to \infty$$

($\mathfrak{s}(f, \mathcal{D}_n)$ a $\mathscr{S}(f, \mathcal{D}_n)$ značí dolní a horní Riemannův součet f přes dělení $\mathcal{D}_n$). Je-li $\mathcal{D}_n = \{a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b\}$, zaveďme funkce s_n, S_n předpisem

$$s_n(x) = \inf_{[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]} f, \quad S_n(x) = \sup_{[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]} f, \quad x \in (x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}],\ i = 1, \ldots, k_n,$$

a $s_n(x) = S_n(x) = 0$ pro ostatní hodnoty $x \in \mathbb{R}$. Pak zřejmě platí

$$\mathfrak{s}(f, \mathcal{D}_n) = \int_a^b s_n \, d\lambda^1, \quad \mathscr{S}(f, \mathcal{D}_n) = \int_a^b S_n \, d\lambda^1.$$

Funkce f je dle předpokladu omezená, tedy $|f| \leq M$ pro nějaké $M \in \mathbb{R}$. Platí

$$-M \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f \leq \cdots \leq S_2 \leq S_1 \leq M.$$

Označme $f_1 := \lim_{n\to\infty} s_n$, $f_2 := \lim_{n\to\infty} S_n$ (monotónní omezená posloupnost vždy konverguje). Pak platí

$$-M \leq s_n \nearrow f_1 \leq f \leq f_2 \swarrow S_n \leq M.$$

a podle zobecněné Leviho věty tedy

$$\int_a^b s_n \, d\lambda^1 \to \int_a^b f_1 \, d\lambda^1, \quad \int_a^b S_n \, d\lambda^1 \to \int_a^b f_2 \, d\lambda^1.$$

Podle předpokladu ale také

$$\int_a^b s_n \, d\lambda^1 = \mathfrak{s}(f, \mathcal{D}_n) \nearrow (\mathrm{R}) \int_a^b f \swarrow \mathscr{S}(f, \mathcal{D}_n) = \int_a^b S_n \, d\lambda^1,$$

takže $\int_a^b f_1 \, d\lambda^1 = \int_a^b f_2 \, d\lambda^1 = (\mathrm{R}) \int_a^b f$. Podle důsledku Věty 6.1 je $f_1 = f_2$ s.v., a zřejmě tedy také $f = f_1$ s.v. (neboť $f_1 \leq f \leq f_2$), a tedy také $\int_a^b f \, d\lambda^1 = (\mathrm{R}) \int_a^b f$. Měřitelnost f plyne z měřitelnosti $f_1 = \lim s_n$ a z úplnosti prostoru s mírou. □

Věta 6.4. *Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená. Pak*

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff f \text{ je spojitá } \lambda^1\text{-s.v. na } [a, b].$$

[Bez důkazu; bude v navazující přednášce]

Uvažujme nyní obecný otevřený podinterval $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Je-li $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, symbolem $(\mathrm{N}) \int_a^b f$ značíme *Newtonův* integrál z funkce f (pokud konverguje, tedy existuje konečný):

$$(\mathrm{N}) \int_a^b f = F(b_-) - F(a_+)$$

Věta 6.5 (Vztah Lebesgueova a Newtonova integrálu). *Nechť f je nezáporná spojitá funkce na intervalu (a, b). Potom* (N) $\int_a^b f$ *konverguje právě tehdy, když* $\int_a^b f \, d\lambda^1$ *konverguje.*

Důkaz. Uvažujme monotónní posloupnosti $a_i \searrow a$, $b_i \nearrow b$, $i \to \infty$, $a < a_i < b_i < b$. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b). Pak pro každé $i \in \mathbb{N}$,

$$(\mathrm{N}) \int_{a_i}^{b_i} f = F(b_i) - F(a_i) = (\mathrm{R}) \int_{a_i}^{b_i} f = \int_{a_i}^{b_i} f \, d\lambda^1$$

podle definice Newtonova integrálu, rovnosti Riemannova a Newtonova integrálu a Věty 6.3. Podle Leviho věty platí

$$\lim_{i\to\infty} \int_{a_i}^{b_i} f \, d\lambda^1 = \lim_{i\to\infty} \int_a^b (f \cdot \chi_{(a_i,b_i)}) \, d\lambda^1 = \int_a^b f \, d\lambda^1.$$

Zároveň z definice Newtonova integrálu je

$$\lim_{i\to\infty} (\mathrm{N}) \int_{a_i}^{b_i} f = (\mathrm{N}) \int_a^b f,$$

právě tehdy, když posledně uvedený Newtonův integrál konverguje. Tím je ekvivalence i rovnost dokázána. □

Důsledek 6.6. *Buď f spojitá funkce na intervalu (a, b).*

1. *Jestliže konverguje* $\int_a^b f \, d\lambda^1$, *konverguje i* (N) $\int_a^b f$, *a to absolutně.*
2. *Jestliže* (N) $\int_a^b f$ *konverguje absolutně, pak konverguje i* $\int_a^b f \, d\lambda^1$.
3. *Jestliže* (N) $\int_a^b f$ *konverguje neabsolutně, pak* $\int_a^b f \, d\lambda^1$ *nemá smysl.*

Přednáška 7.11.2023

7 Věta o jednoznačnosti míry

Definice 7.1. Řekneme, že $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ je *Dynkinův systém*, jestliže

(i) $X \in \mathcal{D}$,

(ii) $D \in \mathcal{D} \implies X \setminus D \in \mathcal{D}$,

(iii) $D_n \in \mathcal{D}$, D_n po dvou disjunktní $\implies \bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$.

Pozn.:

1. Dynkinův systém je uzavřen i na vlastní množinové rozdíly: Jsou-li $A, B \in \mathcal{D}$, $A \subset B$, pak i $B \setminus A \in \mathcal{D}$.
2. Každá σ-algebra je zřejmě Dynkinův systém, ale ne naopak.

Tvrzení 7.1. (a) *Průnik libovolného systému Dynkinových systémů je opět Dynkinův systém.*

(b) *Pro každý množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ existuje nejmenší Dynkinův systém, obsahující $\mathcal{S}$:*

$$\delta\mathcal{S} := \bigcap\{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X) \text{ Dynkinův syst.}, \mathcal{S} \subset \mathcal{D}\}.$$

Věta 7.2. *Nechť je množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ uzavřen na konečné průniky. Pak $\delta\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$.*

Důkaz: Ukážeme, že $\delta\mathcal{S}$ je uzavřen na konečné průniky. Z toho již vyplyne, že $\delta\mathcal{S}$ je σ-algebra, a tedy $\delta\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$. (Skutečně, není těžké ověřit, že každý Dynkinův systém, který je uzavřený na konečné průniky, již je σ-algebrou.)

Položme

$$\mathcal{D} := \{D \in \delta\mathcal{S} : D \cap S \in \delta\mathcal{S} \text{ pro každou } S \in \mathcal{S}\}.$$

Z předpokladu věty víme, že $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$. Ukážeme, že $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém. (i) Zřejmě $X \in \mathcal{D}$. (ii) Je-li $D \in \mathcal{D}$ a $S \in \mathcal{S}$, pak

$$(X \setminus D) \cap S = S \setminus (S \cap D) \in \delta\mathcal{S},$$

tedy $X \setminus D \in \mathcal{D}$. (iii) Jsou-li $D_n \in \mathcal{D}$ po dvou disjunktní a $S \in \mathcal{S}$, pak

$$(\bigcup_n D_n) \cap S = \bigcup_n (D_n \cap S) \in \delta\mathcal{S},$$

tedy $\bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ je tedy Dynkinův systém a musí se tudíž shodovat se $\delta\mathcal{S}$.

Dále položme

$$\mathcal{E} := \{E \in \delta\mathcal{S} : \, E \cap D \in \delta\mathcal{S} \text{ pro každou } D \in \delta\mathcal{S}\}.$$

Z dokázané rovnosti $\mathcal{D} = \delta\mathcal{S}$ plyne $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ je rovněž Dynkinův systém (to se dokáže stejně, jako pro systém $\mathcal{D}$). Platí tedy také $\mathcal{E} = \delta\mathcal{S}$, což znamená, že $\delta\mathcal{S}$ je uzavřen na konečné průniky, a důkaz je hotov. □

Věta 7.3 (Věta o jednoznačnosti míry)**.** *Nechť je množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ uzavřen na konečné průniky a μ, ν nechť jsou dvě míry na $\sigma\mathcal{S}$ takové, že $\mu(S) = \nu(S)$ pro každou $S \in \mathcal{S}$. Nechť dále existují množiny $A_n \in \mathcal{S}$ ($n \in \mathbb{N}$) takové, že $A_n \nearrow X$ a $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\mu = \nu$ na $\sigma\mathcal{S}$.*

Důkaz: (1) Předpokládejme, nejprve, že μ je konečná. Množina

$$\mathcal{D} := \{A \in \sigma\mathcal{S} : \, \mu(A) = \nu(A)\}$$

je Dynkinův systém (vlastnost (i) plyne z $\mu(X) = \lim_n \mu(A_n) = \lim_n \nu(A_n) = \nu(X)$, vlastnosti (ii) a (iii) pak ze (spočetné) aditivity míry). Protože $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ podle předpokladu, musí být $\mathcal{D} = \delta\mathcal{S}$. Podle Věty 7.2 je ovšem $\delta\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$, a tedy μ a ν se shodují na $\sigma\mathcal{S}$.

(2) Je-li μ nekonečná, položíme

$$\mathcal{D}_n := \{A \in \sigma\mathcal{S} : \, \mu(A \cap A_n) = \nu(A \cap A_n)\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Stejně jako v části (1) se ověří, že $\mathcal{D}_n$ je Dynkinův systém obsahující $\mathcal{S}$, a tedy $\mathcal{D}_n = \sigma\mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$. Ze spojitosti míry pak pro libovolnou $A \in \sigma\mathcal{S}$ dostaneme

$$\mu(A) = \lim_n \mu(A \cap A_n) = \lim_n \nu(A \cap A_n) = \nu(A),$$

čímž je důkaz ukončen. □

Příklad: Je-li μ míra na $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ taková, že $\mu(I) = \text{délka}(I)$ pro každý omezený interval I, pak nutně $\mu = \lambda^1$.

8 Součin měr a Fubiniova věta

Mějme dva prostory $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ se σ-konečnými měrami.

Definice 8.1. *Měřitelným obdélníkem* rozumíme množinu $A \times B \subset X \times Y$, kde $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$. σ-algebru

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma\{A \times B : \, A \in \mathcal{A}, \, B \in \mathcal{B}\}$$

nazýváme *součinovou σ-algebrou* na prostoru $X \times Y$.

Pro množinu $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ značíme

$$\begin{aligned} E_x &:= \{y \in Y : (x,y) \in E\}, \quad x \in X, \\ E^y &:= \{x \in X : (x,y) \in E\}, \quad y \in Y \end{aligned}$$

řezy množiny E.

Tvrzení 8.1. *Nechť $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Pak*

1. *$E_x \in \mathcal{B}$ pro všechna $x \in X$,*
2. *funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ je měřitelná na $(X, \mathcal{A})$.*

Důkaz: 1. Pro libovolné $x \in X$ je $\{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : E_x \in \mathcal{B}\}$ zřejmě σ-algebra obsahující všechny měřitelné obdélníky, tedy musí splývat se součinovou σ-algebrou.

2. Zvolme pevně libovolnou množinu $B_0 \in \mathcal{B}$ s mírou $\nu(B_0) < \infty$. Označme

$$\mathcal{D} := \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : x \mapsto \nu(E_x \cap B_0) \text{ je měřitelná}\}.$$

Zřejmě $\mathcal{D}$ obsahuje všechny měřitelné obdélníky, a snadno se ověří, že $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém. $\mathcal{D}$ tedy obsahuje δ-obal všech měřitelných obdélníků, a protože měřitelné obdélníky jsou uzavřené na konečné průniky, jejich δ-obal je totožný se σ-obalem, a tedy $\mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Protože ν je σ-konečná, existují množiny $B_n \in \mathcal{B}$, $\nu(B_n) < \infty$, $B_n \nearrow Y$, $n \to \infty$. Pak pro libovolnou $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ platí $\nu(E_x) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_x \cap B_n)$, a tedy funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ je měřitelná (jako limita měřitelných funkcí). □

Věta 8.2 (Existence a jednoznačnost součinové míry)**.** *Existuje právě jedna míra $\mu \otimes \nu$ na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ s vlastností*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B), \quad A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}$$

(klademe $0 \cdot \infty = 0$).

Důkaz: Pro $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ položme

$$(\mu \otimes \nu)(E) := \int \nu(E_x)\, d\mu(x). \tag{1}$$

Nejprve ukážeme, že $\mu \otimes \nu$ je míra na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Zřejmě $(\mu \otimes \nu)(\emptyset) = 0$. Jsou-li $E_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ po dvou disjunktní, platí

$$\begin{aligned} (\mu \otimes \nu)(\bigcup_n E_n) &= \int \nu((\bigcup_n E_n)_x)\, d\mu(x) = \int \nu(\bigcup_n (E_n)_x)\, d\mu(x) \\ &= \int \sum_n \nu((E_n)_x)\, d\mu(x) = \sum_n (\mu \otimes \nu)(E_n) \end{aligned}$$

(využili jsme faktu, že řezy disjunktních množin jsou opět disjunktní). Tedy $\mu \otimes \nu$ je míra.

Z definice je zřejmé, že pro měřitelný obdélník $A \times B$ je $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Zbývá ukázat jednoznačnost. Použijeme Větu 7.3. Systém všech měřitelných obdélníků je uzavřen na konečné průniky a součinová míra je na měřitelných obdélnících jednoznačně určena. Protože μ a ν jsou σ-konečné míry, existují množiny $A_n \in \mathcal{A}$, $\mu(A_n) < \infty$, $A_n \nearrow X$, a $B_n \in \mathcal{B}$, $\nu(B_n) < \infty$, $B_n \nearrow Y$, $n \to \infty$. Měřitelné obdélníky $C_n := A_n \times B_n$ pak splňují $(\mu \otimes \nu)(C_n) < \infty$ a $C_n \nearrow X \times Y$, předpoklady Věty 7.3 jsou tedy splněny. □

Definice 8.2 (Obraz míry)**.** Buď $\varphi : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$ měřitelné zobrazení a μ míra na $(E, \mathcal{E})$. Pak množinová funkce

$$\mu\varphi^{-1} : B \mapsto \mu(\varphi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{F},$$

je míra na $(F, \mathcal{F})$ a nazýváme ji *obrazem míry* μ při zobrazení φ.

Přednáška 14.11.2023

Tvrzení 8.3 (Symetrie součinové míry)**.** *Platí* $\nu \otimes \mu = (\mu \otimes \nu)\tau^{-1}$*, kde* $\tau : X \times Y \to Y \times X$ *je záměna souřadnic, tedy* $\tau : (x, y) \mapsto (y, x)$*.*

Důkaz. Nejprve ověříme, že $\tau^{-1}(\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Toto snadno plyne z Věty 3.1 (ii), neboť $\tau^{-1}(\sigma\mathcal{S}) = \sigma(\tau^{-1}\mathcal{S})$, kde $\mathcal{S}$ značí systém všech měřitelných obdélníků v $Y \times X$.

Míry $\nu \otimes \mu$ a $(\mu \otimes \nu)\tau^{-1}$ se shodují na měřitelných obdélnících, tedy se rovnají podle předchozí věty. □

Důsledek 8.4. *Platí*

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int \mu(E^y)\, d\nu(y), \quad E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

Důkaz. Platí

$$(\mu \otimes \nu)(E) = (\nu \otimes \mu)(\tau E) = \int \mu((\tau E)_y)\, d\nu(y) = \int \mu(E^y)\, d\nu(y),$$

využili jsme předchozího tvrzení a vztahu (1). □

Věta 8.5 (Fubiniova věta)**.** *Pro každou funkci* $f \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes \nu)$ *platí:*

$$\int f\, d(\mu \otimes \nu) = \int \left(\int f(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Důkaz.

1. Je-li f charakteristickou funkcí množiny ze součinové σ-algebry, plyne rovnost z (1) a Důsledku 8.4.

2. Pro jednoduchou měřitelnou funkci $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{E_i}$ máme

$$\begin{aligned} \int s\, d(\mu \otimes \nu) &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \int \nu((E_i)_x)\, d\mu(x) \\ &= \int \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nu((E_i)_x)\, d\mu(x) \\ &= \int (\int s(x, y)\, d\nu(y))\, d\mu(x). \end{aligned}$$

   Z uvedeného výpočtu rovněž plyne, že funkce $x \mapsto \int s(x, y)\, d\nu(y)$ je měřitelná. Druhá rovnost se odvodí analogicky.

3. Buď $f \geq 0$ měřitelná a $s_n \nearrow f$ jednoduché měřitelné funkce. Pak podle Leviho věty

$$\int s_n(x, y)\, d\nu(y) \nearrow \int f(x, y)\, d\nu(y), \quad x \in X.$$

Protože integrály na levé straně jsou měřitelnými funkcemi proměnné x, i integrál na pravé straně je měřitelnou funkcí v x a opětovným použitím Leviho věty dostaneme

$$\int\int s_n(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x) \nearrow \int\int f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x).$$

Podle již dokázané části 2 se integrál na levé straně shoduje s

$$\int s_n\,d(\mu\otimes\nu) \nearrow \int f\,d(\mu\otimes\nu),$$

čímž dostáváme první z obou dokazovaných rovností (a druhá opět plyne analogicky).

4. Je-li $f = f^+ - f^- \in \mathcal{L}^*(\mu\otimes\nu)$, ověříme rovnost snadno pomocí příslušných rovností pro f^+ a f^-.

$\square$

Příklad: Uvažujme $X = Y = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $\mu = \nu$ je aritmetická míra. Definujme funkci $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ následovně:

$$f(z_1,z_2) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } z_2 = z_1 \geq 0 \text{ nebo } z_2 = z_1 - 1 \leq -1, \\ -1 & \text{pokud } z_2 = z_1 < 0 \text{ nebo } z_2 = z_1 - 1 > -1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Platí

$$\int\int f(z_1,z_2)d\mu(z_1)\,d\mu(z_2) = \sum_{z_2}\sum_{z_1} f(z_1,z_2) = 0,$$

ale

$$\int\int f(z_1,z_2)d\mu(z_2)\,d\mu(z_1) = \sum_{z_1}\sum_{z_2} f(z_1,z_2) = 2,$$

přitom ovšem $f \notin \mathcal{L}^*(\mu\otimes\mu)$.

Pozn.: Prostor se součinovou mírou $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \mu\otimes\nu)$ nemusí být úplný, ani když prostory $(X,\mathcal{A},\mu)$ a $(Y,\mathcal{B},\nu)$ jsou úplné. Zúplněný prostor se součinovou mírou značíme $(X\times Y, \mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}, \mu\hat{\otimes}\nu)$.

Příklad: Uvažujme prostor se zúplněnou Lebesgueovou mírou $(\mathbb{R},\mathcal{B}_0,\lambda)$. Je-li $A\subset\mathbb{R}$ neměřitelná množina (viz úvodní přednáška), pak $A\times\{0\}$ neleží v $\mathcal{B}_0\otimes\mathcal{B}_0$, ale je nulová, protože $A\times\{0\}\subset\mathbb{R}\times\{0\}$ a $(\lambda\otimes\lambda)(\mathbb{R}\times\{0\}) = 0$.

Důsledek 8.6 (Fubiniova věta pro zúplněnou součinovou míru)**.** *Buďte $(X,\mathcal{A},\mu)$ a $(Y,\mathcal{B},\nu)$ dva úplné prostory se σ-konečnými měrami. Pak pro každou funkci $f\in\mathcal{L}^*(\mu\hat{\otimes}\nu)$ platí:*

$$\int f\,d(\mu\hat{\otimes}\nu) = \int\left(\int f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int\left(\int f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y).$$

Důkaz. Rovnost nejprve dokážeme pro případ $f = \chi_E$, kde $E \in \mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}$. Podle Věty 2.4 existuje $F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ taková, že $E \triangle F$ je nulová, tedy

$$\int f \, d(\mu \hat{\otimes} \nu) = (\mu \hat{\otimes} \nu)(E) = (\mu \otimes \nu)(F).$$

Podle Fubiniovy věty platí $(\mu \otimes \nu)(F) = \int \nu(F_x) \, d\mu(x)$. Ukážeme-li, že

$$\int \nu(E_x) \, d\mu(x) = \int \nu(F_x) \, d\mu(x),$$

dokážeme tím první z dvou dokazovaných rovností věty pro případ $f = \chi_E$ (druhá rovnost plyne analogicky.) K tomu stačí ukázat, že $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ μ-s.v. Z definice nulové množiny víme, že existuje $N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ taková, že $E \triangle F \subset N$ a $(\mu \otimes \nu)(N) = 0$. Ze vztahu (1) plyne $\nu(N_x) = 0$ μ-s.v. Dále zřejmě platí

$$E_x \triangle F_x = (E \triangle F)_x \subset N_x,$$

tedy také $\nu(E_x \triangle F_x) = 0$ μ-s.v., a tudíž $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ μ-s.v.

Dále lze postupně ukázat platnost rovnosti pro jednoduché měřitelné funkce, nezáporné měřitelné funkce a funkce z $\mathcal{L}^*(\mu \hat{\otimes} \nu)$, stejně jako v důkazu Věty 8.5. □

Věta 8.7 (Součin Lebesgueových měr)**.** *Pro* $p, q \in \mathbb{N}$ *platí:*

(i) $\mathcal{B}^{p+q} = \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q$,

(ii) $\lambda^{p+q} = \lambda^p \otimes \lambda^q$.

Důkaz. (i). Každý otevřený $(p+q)$-kvádr je kartézským součinem otevřeného p-kvádru a otevřeného q-kvádru. Nechť $\mathcal{Q}^k$ značí systém všech otevřených k-kvádrů. Pak platí

$$\mathcal{B}^{p+q} = \sigma\{U \times V : U \in \mathcal{Q}^p, V \in \mathcal{Q}^q\} \subset \sigma\{A \times B : A \in \mathcal{B}^p, B \in \mathcal{B}^q\} = \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q.$$

Pro druhou inkluzi stačí ukázat, že $A \times B \in \mathcal{B}^{p+q}$ kdykoliv $A \in \mathcal{B}^p$ a $B \in \mathcal{B}^q$. Označme

$$\mathcal{D}_1 := \{A \in \mathcal{B}^p : A \times V \in \mathcal{B}^{p+q} \text{ kdykoliv } V \in \mathcal{Q}^q\}.$$

Zřejmě $\mathcal{Q}^p \subset \mathcal{D}_1$ a snadno lze ukázat, že $\mathcal{D}_1$ je σ-algebra. Platí tedy $\mathcal{D}_1 = \mathcal{B}^p$. Dále označme

$$\mathcal{D}_2 := \{B \in \mathcal{B}^q : A \times B \in \mathcal{B}^{p+q} \text{ kdykoliv } A \in \mathcal{B}^p\}.$$

Platí $\mathcal{Q}_q \subset \mathcal{D}_2$ (protože $\mathcal{D}_1 = \mathcal{B}^p$) a $\mathcal{D}_2$ je opět σ-algebra, tudíž $\mathcal{D}_2 = \mathcal{B}^q$. σ-algebra $\mathcal{B}^{p+q}$ tedy obsahuje všechny měřitelné obdélníky v $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, a musí tedy obsahovat i $\mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q$.

(ii). Míry λ^{p+q} a $\lambda^p \otimes \lambda^q$ se shodují na otevřených kvádrech z $\mathcal{Q}^{p+q}$. Systém $\mathcal{Q}^{p+q}$ je uzavřen na konečné průniky, generuje $\mathcal{B}^{p+q}$ a existuje posloupnost otevřených kvádrů $Q_i \nearrow \mathbb{R}^{p+q}$ konečné míry, tedy λ^{p+q} a $\lambda^p \otimes \lambda^q$ se shodují i na $\mathcal{B}^{p+q}$ podle Věty 7.3. □

V dalším budeme symbolem $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^k)$ zkráceně značit prostor $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_0^k, \lambda^k)$.

Důsledek 8.8 (Fubiniova věta v $\mathbb{R}^{p+q}$). *Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ platí*

$$\int f(x,y)\,d(x,y) = \int \left(\int f(x,y)\,dy \right) dx = \int \left(\int f(x,y)\,dx \right) dy,$$

kde píšeme stručně $dx := d\lambda^p(x)$, $dy := d\lambda^q(y)$, $d(x,y) := d\lambda^{p+q}(x,y)$.

Důsledek 8.9. *Pro množinu $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ platí*

$$\lambda^{p+q}(A) = \int_{\pi_1 A} \lambda^q(A_x)\,dx = \int_{\pi_2 A} \lambda^p(A^y)\,dy,$$

kde $\pi_1 : (x,y) \mapsto x$ a $\pi_2 : (x,y) \mapsto y$ jsou projekce.

Důsledek 8.10. *Pro funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ a množinu $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ platí*

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\pi_1 A} \left(\int_{A_x} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\pi_2 A} \left(\int_{A^y} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Příklad: Pro jednotkovou kouli $B_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ v $\mathbb{R}^3$ dostáváme podle Důsledku 8.9

$$\lambda^3(B_1) = \int_{-1}^{1} \pi(1 - z^2)\,dz = \frac{4}{3}\pi.$$

Přednáška 21.11.2023

9 Věta o substituci

Připomenutí: Pro funkci $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ a diferencovatelnou surjektivní monotónní funkci $\varphi : (a, b) \to (\alpha, \beta)$ platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\, dx = \int_\alpha^\beta f(y)\, dy,$$

má-li jedna strana smysl jako Newtonův integrál.

Tvrzení 9.1 (Lebesgueova míra je translačně invariantní)**.** *Pro každou $B \in \mathcal{B}^n$ a $z \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$\lambda^n(B + z) = \lambda^n(B).$$

Důkaz. Plyne z věty o jednoznačnosti míry, neboť λ^n a míra $\mu(B) := \lambda^n(B+z)$, $B \in \mathcal{B}^n$, se shodují na otevřených kvádrech. □

Věta 9.2. *Buď $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ regulární lineární zobrazení a $A \in \mathcal{B}^n$. Pak $L(A) \in \mathcal{B}^n$ a platí $\lambda^n(L(A)) = |\det L|\lambda^n(A)$.*

Důkaz. Každé lineární zobrazení mezi konečněrozměrnými prostory je spojité. Protože L je regulární, existuje (spojité) inverzní zobrazení L^{-1}, a tedy $L(A) = (L^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{B}^n$.

Podle známé věty z lineární algebry lze každé regulární lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vyjádřit jako složení konečně mnoha "elementárních" lineárních zobrazení jednoho ze tří typů:

(i) $L_1 : (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ (tedy L_1 prohazuje i-tou a j-tou souřadnici vektoru);

(ii) $L_2 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + bx_1)$ ($b \in \mathbb{R}$) (L_2 přičte k n-té souřadnici b-násobek první souřadnice);

(iii) $L_3 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, ax_n)$ ($a \neq 0$) (L_3 vynásobí n-tou souřadnici nenulovým faktorem a).

Protože složené lineární zobrazení odpovídá součinu příslušných matic, a determinant součinu je součinem determinantu jednotlivých matic, stačí dokazovanou identitu ukázat pro případy $L = L_1, L_2$ a L_3.

Míry $\lambda^n L_1$ a λ^n se shodují na systému otevřených kvádrů. Podle věty o jednoznačnosti míry se tedy shodují i na borelovské σ-algebře, a máme tedy $\lambda^n(L_1(A)) = \lambda^n(A) = |\det L_1|\lambda^n(A)$, $A \in \mathcal{B}^n$.

Podle Fubiniovy věty platí

$$\lambda^n(L_2(A)) = \int_{\pi_{n-1}(L_2(A))} \lambda^1\left((L_2(A))_{(x_1,\dots,x_{n-1})}\right)\, d(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

kde $\pi_{n-1} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Pro řez množiny $L_2(A)$ pak z tvaru L_2 dostáváme

$$(L_2(A))_{(x_1,\ldots,x_{n-1})} = A_{(x_1,\ldots,x_{n-1})} + bx_1,$$

a protože λ^1 je translačně invariantní a $\pi_{n-1}(L_2(A)) = \pi_{n-1}(A)$, máme

$$\lambda^n(L_2(A)) = \int_{\pi_{n-1}(A)} \lambda^1 \left(A_{(x_1,\ldots,x_{n-1})}\right) d(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \lambda^n(A).$$

Jelikož $|\det L_2| = 1$, ověřili jsme tím rovnost pro L_2.

Míry λ^n a $\mu(A) := |a|^{-1}\lambda^n(L_3(A))$ se shodují na systému otevřených kvádrů, proto se shodují podle věty o jednoznačnosti i na borelovských množinách. Platí tedy $\lambda^n(L_3(A)) = |a|\lambda^n(A) = |\det L_3|\lambda^n(A)$. Tím je důkaz ukončen. $\square$

Důsledek 9.3 (Lebesgueova míra je izometricky invariantní)**.** *Je-li $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrie (tzn. $\|S(x)-S(y)\| = \|x-y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$), pak $\lambda^n(S(A)) = \lambda^n(A)$, $A \in \mathcal{B}^n$.*

Důkaz. Podle věty z Geometrie 1 lze každou izometrii v $\mathbb{R}^n$ zapsat ve tvaru

$$S : x \mapsto b + R(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

kde $b \in \mathbb{R}^n$ ("posunutí") a R je ortogonální lineární zobrazení (tzn. $R^T R = I$). Protože $|\det R| = 1$ a λ^n je translačně invariantní, dostáváme $\lambda^n(S(A)) = \lambda^n(A)$ z Tvrzení 9.2. $\square$

Pozn.:

1. Je-li $W \subset \mathbb{R}^n$ afinní podprostor dimenze menší než n, platí $\lambda^n(W) = 0$. (Plyne snadno z Fubiniovy věty.)

2. Vzorec z Věty 9.2 platí i bez předpokladu regularity zobrazení L.

Důsledek 9.4 (Homogenita Lebesgueovy míry)**.**

$$\lambda^n(rA) = |r|^n \lambda^n(A), \quad r \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{B}^n.$$

Definice 9.1. Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : U \to \mathbb{R}^n$ zobrazení třídy C^1. Pak $\mathcal{J}f(x) := \det Df(x)$ je *Jakobián funkce f v bodě x*, $x \in U$.

Definice 9.2. Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Zobrazení $f : U \to \mathbb{R}^n$ je *difeomorfismus*, je-li prosté, třídy C^1 a platí-li $\mathcal{J}f(x) \neq 0$, $x \in U$.

Pozn.: Z věty o inverzním zobrazení plyne, že je-li $f : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus, je obraz $f(U)$ otevřená množina a f^{-1} je třídy C^1 na $f(U)$.

Věta 9.5 (Věta o substituci)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus a $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ Lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

$$\int_U f(\varphi(x))\, |\mathcal{J}\varphi(x)|\, dx = \int_{\varphi(U)} f(y)\, dy,$$

má-li jedna strana smysl.

Důkaz bude v navazující přednášce.

Důsledek 9.6. *Je-li navíc $B \subset \varphi(U)$ Lebesgueovsky měřitelná množina, platí*

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(x))\,|\mathcal{J}\varphi(x)|\,dx = \int_B f(y)\,dy,$$

má-li jedna strana smysl.

Příklady:

1. Zobrazení $\varphi : (r,t) \mapsto (r\cos t, r\sin t)$ je difeomorfismus na $U = (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$, $\mathcal{J}\varphi(r,t) = r$ a platí $\lambda^2(\mathbb{R}^2 \setminus \varphi(U)) = 0$, proto

$$\lambda^2(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} r\,d(r,t), \quad B \in \mathcal{B}_0^2.$$

2. Zobrazení $\psi : (r,s,t) \mapsto (r\cos s\cos t, r\sin s\cos t, r\sin t)$ je difeomorfismus na $U = (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $\mathcal{J}\psi(r,s,t) = r^2\cos t$ a platí $\lambda^3(\mathbb{R}^3 \setminus \psi(U)) = 0$, proto

$$\lambda^3(B) = \int_{\psi^{-1}(B)} r^2\cos t\,d(r,s,t), \quad B \in \mathcal{B}_0^3.$$

Přednáška 28.11.2023

10 Prostory L^p

Definice 10.1. Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a funkce $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelná. Definujeme

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &:= \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty, \\
\|f\|_\infty &:= \inf\{\alpha \ge 0 : \mu\{x \in X : |f(x) > \alpha\} = 0\}\}, \\
\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) &:= \{f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}^*) : \|f\|_p < \infty\}, \quad 1 \le p \le \infty.
\end{aligned}$$

(Často budeme psát stručně pouze $\mathcal{L}^p(\mu)$ nebo $\mathcal{L}^p(X)$.)

Cvičení: V případě konečné množiny X ukažte, že

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Pozn.: Platí $|f| \le \|f\|_\infty$ μ-skoro všude.

Tvrzení 10.1 (Hölderova nerovnost)**.** *Nechť $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $1 \le p, q \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a platí*

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Důkaz. Uvažujme nejprve případ $p = 1$, $q = \infty$. Pak

$$\|fg\|_1 = \int |f(x)g(x)| \, d\mu(x) \le \|g\|_\infty \int |f(x)| \, d\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Dále předpokládejme, že $1 < p, g < \infty$. K důkazu nerovnosti použijeme pomocné lemma:

Lemma 10.2 (Youngovo lemma)**.** *Je-li $a, b \ge 0$ a $p, q > 1$ takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pak*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz. Nechť $ab > 0$ jinak je nerovnost zřejmá). Protože logaritmus je konkávní funkce, platí

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \ge \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q = \log a + \log b = \log(ab).$$

Z toho již plyne dokazovaná rovnost, neboť logaritmus je rostoucí funkce. $\square$

Dokončení důkazu Hölderovy nerovnosti. Je-li $\|f\|_p = 0$ nebo $\|g\|_q = 0$, musí být $f \cdot g = 0$ s.v. a nerovnost zřejmě platí. Nechť dále $\|f\|_p > 0$ a $\|g\|_q > 0$. Podle Youngovy nerovnosti platí

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}, \quad x \in X,$$

a zintegrováním dostaneme

$$\frac{\int |f \cdot g| \, d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{\|f\|_p^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_q^q}{q\|g\|_q^q} = 1,$$

což je Hölderova nerovnost. □

Věta 10.3 (Minkowského nerovnost)**.** *Jsou-li $1 \leq p \leq \infty$ a $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, pak také $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ a platí*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Důkaz. Je-li $p = 1$, nerovnost snadno plyne z trojúhelníkové nerovnosti $|f+g| \leq |f| + |g|$ zintegrováním. Je-li $p = \infty$, platí podle definice $|f| \leq \|f\|_\infty$ s.v. a $|g| \leq \|g\|_\infty$ s.v., tedy

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ s.v.},$$

z čehož plyne $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Nechť nyní $1 < p < \infty$. Funkce $x \mapsto x^p$ je konvexní na $(0, \infty)$, tudíž

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^p \leq \left(\frac{|f| + |g|}{2}\right)^p \leq \frac{|f|^p + |g|^p}{2},$$

z čehož zintegrováním dostaneme

$$\|f + g\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) < \infty.$$

Tedy $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Položme $q := \frac{p}{p-1}$ (platí tedy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Funkce $|f + g|^{p-1}$ leží v $\mathcal{L}^q(\mu)$ a podle Hölderovy nerovnosti platí

$$\int (|f| \cdot |f + g|^{p-1}) \, d\mu \leq \|f\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q,$$
$$\int (|g| \cdot |f + g|^{p-1}) \, d\mu \leq \|g\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q.$$

Sečtením obou nerovností a s využitím identity

$$\||f + g|^{p-1}\|_q = \|f + g\|_p^{p-1}$$

dostaneme

$$\int |f + g|^p \, d\mu \leq \int (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} \, d\mu \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{p-1},$$

což je Minkowského nerovnost. □

Pozn.: $\mathcal{L}^p(\mu)$ je tedy vektorový prostor a $\|\cdot\|_p$ je *seminorma* (tedy splňuje vlastnosti normy, s tou výjimkou, že z $\|f\|_p = 0$ neplyne $f = 0$).

Definice 10.2. Nechť $1 \le p \le \infty$. Na množině $\mathcal{L}^p(\mu)$ definujeme ekvivalenci

$$f \sim g \iff f = g \ \mu - \text{skoro všude}.$$

Dále klademe

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu) \mid_\sim$$

(faktorprostor, formálně množina tříd ekvivalence $\sim$).

Tvrzení 10.4. *Pro $1 \le p \le \infty$ a $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ platí*

$$\|f - g\|_p = 0 \iff f \sim g.$$

Důkaz: Plyne z Věty 6.1.

Důsledek: $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ je normovaný lineární prostor.

Věta 10.5. *Prostor $L^p(\mu)$ je úplný.*

[Důkaz: přednáška MA3]

11 Konvergence posloupností funkcí

Pro reálné funkce f_n, f definované na neprázdné množině X značíme symbolem $f_n \to f$ *bodovou* konvergenci f_n k f (tedy pro každé $x \in X$ platí $f_n(x) \to f(x)$).

Definice 11.1. Řekneme, že funkce f_n konvergují *stejnoměrně* k funkci f na množině X (značíme $f_n \rightrightarrows f$), jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \ge n_0)(\forall x \in X) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Pozn.: Stejnoměrná konvergence implikuje bodovou konvergenci, ale ne naopak. Například funkce x^n konvergují k nule bodově na $(0, 1)$, ale ne stejnoměrně.

Je-li speciálně $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, máme navíc konvergenci *skoro všude* ($f_n \to f$ s.v.) a *L^p-konvergenci* ($f_n \xrightarrow{L_p} f \iff \|f_n - f\|_p \to 0$), $1 \le p \le \infty$.

Definice 11.2. Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $f_n, f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že *funkce f_n konvergují k funkci f podle míry μ* (píšeme $f_n \xrightarrow{\mu} f$), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \lim_{n \to \infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\} = 0.$$

Věta 11.1. *Pro $1 \le p \le \infty$ a $f_n, f \in L^p(\mu)$ platí:*

$$f_n \xrightarrow{L^p} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

Tvrzení 11.2 (Čebyševova nerovnost)**.** *Nechť* $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mu)$ *a* $c > 0$. *Pak*

$$\mu\{x \in X : |f(x)| \ge c\} \le \frac{\|f\|_p^p}{c^p}.$$

Důkaz. Platí

$$\mu\{|f| \ge c\} = \int_{\{|f|\ge c\}} 1 \, d\mu \le \int_{\{|f|\ge c\}} \left(\frac{|f|}{c}\right)^p \, d\mu \le \int \left(\frac{|f|}{c}\right)^p \, d\mu = \frac{\|f\|_p^p}{c^p}.$$

□

Důkaz Věty 11.1. Je-li $p = \infty$ a $\varepsilon > 0$, pak existuje n_0 takové, že $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$, a tedy $\mu\{|f_n - f| \ge \varepsilon\} = 0$, pro $n > n_0$.

Je-li $p < \infty$, plyne tvrzení přímo z Čebyševovy nerovnosti. □

Přednáška 5.12.2023

Věta 11.3 (Jegorov)**.** *Nechť $\mu(X) < \infty$, f_n, f jsou reálné měřitelné funkce na X, $f_n \to f$ μ-s.v., a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $E \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(E) < \varepsilon$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $X \setminus E$.*

Důkaz. Existuje množina N nulové míry taková, že $f_n(x) \to f(x)$, $x \in X \setminus N$. Položme

$$A_{m,k} := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{1}{k} \text{ pro každé } n \geq m\}, \quad m, k \in \mathbb{N}.$$

Pak pro každé k platí $A_{1,k} \subset A_{2,k} \subset \dots$ a z definice konvergence platí

$$\bigcap_m (X \setminus A_{m,k}) \subset N.$$

Podle věty o spojitosti míry a díky konečnosti μ tedy existuje $m(k)$ takové, že $\mu(X \setminus A_{m(k),k}) < \varepsilon 2^{-k}$. Položme $E := \bigcup_{k=1}^{\infty}(X \setminus A_{m(k),k})$. Zřejmě $\mu(E) < \varepsilon$. Nechť $x \in X \setminus E$. Pak $x \in A_{m(k),k}$ pro všechna k, a tedy $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ kdykoliv $n \geq m(k)$. Tím je dokázána stejnoměrná konvergence f_n k f na $X \setminus E$. □

Důsledek 11.4. *Jestliže $\mu(X) < \infty$ a f_n, f jsou reálné měřitelné funkce na X takové, že $f_n \to f$ μ-s.v., pak $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

Důkaz. Pro $\varepsilon, \delta > 0$ platí

$$\mu\{|f_n - f| \geq \delta\} = \mu(\{|f_n - f| \geq \delta\} \cap E) + \mu(\{|f_n - f| \geq \delta\} \setminus E),$$

kde E je množina z Jegorovovy věty. První sčítanec je pak menší než ε a druhý je roven nule pro dostatečně velká n. □

Pozn.: Funkce $f_n = \chi_{[n,\infty)}$ konvergují bodově k nule, ale nikoliv podle míry λ^1. Předpoklad konečnosti míry je tedy v Jegorovově větě nutný.

Cvičení: Jestliže $f_n \xrightarrow{\mu} f$ na prostoru s konečnou mírou μ, pak existuje vybraná podposloupnost (f_{n_j}) taková, že $f_{n_j} \to f$ μ-s.v.

Věta 11.5. *Nechť $\mu(X) < \infty$ a $1 \leq p < q \leq \infty$. Pak $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ a pro $f_n, f \in L^q(\mu)$ platí:*

$$f_n \xrightarrow{L^q} f \implies f_n \xrightarrow{L^p} f.$$

Důkaz. Je-li $f \in L^q$, platí

$$\int |f|^p = \int_{|f| \leq 1} |f|^p + \int_{|f|>1} |f|^p \leq \mu(X) + \int |f|^q < \infty,$$

tedy $f \in L^p$. Nechť dále $f_n \xrightarrow{L^q} f$ a $\varepsilon > 0$. Pro $\delta > 0$ je

$$\int |f_n - f|^p = \int\limits_{|f_n - f| \le \delta} |f_n - f|^p + \int\limits_{|f_n - f| > \delta} |f_n - f|^p \le \delta^p \mu(X) + \delta^{p-q} \int |f_n - f|^q.$$

Zvolme $\delta > 0$ tak malé, aby $\delta^p \mu(X) < \frac{\varepsilon}{2}$. K tomuto δ pak existuje n_0 takové, že $\delta^{p-q} \int |f_n - f|^q < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $n \ge n_0$. Pak je $\int |f_n - f|^p < \varepsilon$ pro $n \ge n_0$, a tím je $f_n \xrightarrow{L^p} f$ dokázáno. □

Příklad: $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ leží v $L^1(0,1)$, ale nikoliv v $L^2(0,1)$. Funkce $f(x) = x^{-1}$ leží v $L^2(1,\infty)$, ale nikoliv v $L^1(1,\infty)$.

12 Radon-Nikodymova věta

Tvrzení 12.1. *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $f \ge 0$ měřitelná funkce na X. Pak předpis*

$$\nu : A \mapsto \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

definuje míru na $(X, \mathcal{A})$ a pro každou měřitelnou funkci g na X platí

$$\int g \, d\nu = \int g \cdot f \, d\mu,$$

má-li jedna strana smysl.

Důkaz. Zřejmě $\nu(\emptyset) = 0$ a $\nu \ge 0$. Ukážeme σ-aditivitu. Jsou-li $A_n \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní, je

$$\nu(\bigcup_n A_n) = \int (f \cdot \chi_{\bigcup_n A_n}) \, d\mu = \int \sum_n (f \cdot \chi_{A_n}) \, d\mu = \sum_n \int_{A_n} f \, d\mu = \sum_n \nu(A_n).$$

Rovnost $\int g \, d\nu = \int g \cdot f \, d\mu$ platí z definice, pokud g je charakteristickou funkcí měřitelné množiny. Standardním způsobem platnost rovnosti rozšíříme postupně pro jednoduché měřitelné funkce, nezáporné měřitelné a nakonec pro měřitelné, pro něž integrál existuje. □

Pozn.: Zřejmě platí: $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$, $A \in \mathcal{A}$.

Definice 12.1. Buďte μ, ν dvě míry na $(X, \mathcal{A})$. Řekneme, že míra ν je *absolutně spojitá* vzhledem k míře μ (píšeme $\nu \ll \mu$), jestliže

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Věta 12.2 (Radon-Nikodym)**.** *Buďte μ, ν dvě σ-konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že $\nu \ll \mu$. Pak existuje nezáporná měřitelná funkce f na X taková, že*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Definice 12.2. Funkci f z předchozí věty nazýváme (Radon-Nikodymovou) *hustotou* míry ν vyhledem k μ a píšeme

$$f(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x), \quad x \in X.$$

Věta 12.3 (Radon-Nikodym, speciální případ)**.** *Buďte μ, ν dvě konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že $\nu(A) \leq \mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$. Pak existuje měřitelná funkce f na X splňující $0 \leq f \leq 1$ μ-s.v. a*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Důkaz. Označme funkcionál

$$\mathcal{J}g := \int g^2 \, d\mu - 2 \int g \, d\nu, \quad g \in L^2(\mu).$$

(Funkcionál je dobře definován, protože $L^2(\mu) \subset L^1(\mu) \subset L^1(\nu)$.) Dále označme $c := \inf\{\mathcal{J}g : \, g \in L^2(\mu)\}$. Platí

$$\mathcal{J}g \geq \int g^2 \, d\mu - 2 \int |g| \, d\mu = \int (|g| - 1)^2 \, d\mu - \mu(X) \geq -\mu(X),$$

tedy $c \geq -\mu(X) > -\infty$. Buď $(f_n) \subset L^2(\mu)$ posloupnost taková, že $\mathcal{J}f_n \to c$. Ukážeme, že (f_n) je cauchyovská v $L^2(\mu)$.

Pro libovolné $g, h \in L^2(\mu)$ platí

$$\begin{aligned} \mathcal{J}g + \mathcal{J}h &= \int (g^2 + h^2) \, d\mu - 2 \int (g + h) \, d\nu, \\ -2\mathcal{J}(\tfrac{g+h}{2}) &= -\int \tfrac{(g+h)^2}{2} \, d\mu + 2 \int (g + h) \, d\nu, \end{aligned}$$

sečtením pak dostaneme

$$\mathcal{J}g + \mathcal{J}h - 2\mathcal{J}(\tfrac{g+h}{2}) = \frac{1}{2} \int (g - h)^2 \, d\mu = \frac{1}{2} \|g - h\|_2^2.$$

Z toho plyne, že

$$\begin{aligned} \|f_m - f_n\|_2^2 &= 2 \left(\mathcal{J}f_m + \mathcal{J}f_n - 2\mathcal{J}(\tfrac{f_m + f_n}{2}) \right) \\ &\leq 2 \left(\mathcal{J}f_m + \mathcal{J}f_n - 2c \right) \to 0, \quad m, n \to \infty, \end{aligned}$$

tedy (f_n) je cauchyovská v $L^2(\mu)$.

Dále platí $\int f_n^2 \, d\mu \to \int f^2 \, d\mu$ (protože norma je vždy spojitá), a

$$\left| \int f_n \, d\nu - \int f \, d\nu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\nu \leq \int |f_n - f| \, d\mu \to 0,$$

protože $f_n \to f$ i v $L^1(\mu)$. Platí tedy $\mathcal{J}f_n \to f$, takže $\mathcal{J}f = c$.

Buďte nyní $A \in \mathcal{A}$ a $t \in \mathbb{R}$ libovolné. Protože $\mathcal{J} f \leq \mathcal{J}(f + t\chi_A)$, platí

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathcal{J}(f + t\chi_A) - \mathcal{J} f = \int ((f + t\chi_A)^2 - f^2)\, d\mu - 2 \int t\chi_A \, d\nu \\
&= \int f \cdot 2t\chi_A \, d\mu + t^2 \mu(A) - 2t\nu(A) \\
&= 2t \left(\int_A f \, d\mu - \nu(A) \right) + t^2 \mu(A).
\end{aligned}$$

V posledním řádku je kvadratický polynom v t, který nabývá minima v $t = 0$, tedy jeho lineární člen musí být roven nule, neboli

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu.$$

f je tedy hustotou $\frac{d\nu}{d\mu}$. Zbývá ukázat, že $0 \leq f \leq 1$ μ-s.v. Platí

$$\begin{aligned}
0 \leq \int (f-1)^+ \, d\mu &= \int_{\{f>1\}} (f-1)\, d\mu = \int_{\{f>1\}} f \, d\mu - \int_{\{f>1\}} 1 \, d\mu \\
&= \nu(\{f > 1\}) - \mu(\{f > 1\}) \leq 0,
\end{aligned}$$

tedy $(f-1)^+ = 0$ μ-s.v., neboli $f \leq 1$ μ-s.v. Podobně platí

$$0 \leq \int f^- \, d\mu = -\int_{\{f<0\}} f \, d\mu = -\nu(\{f < 0\}) \leq 0,$$

tedy $f^- = 0$ μ-s.v., což znamená, že $f \geq 0$ μ-s.v. $\square$

Přednáška 12.12.2023

Důkaz Radon-Nikodymovy věty. Nechť nejprve μ, ν jsou konečné míry na $(X, \mathcal{A})$, $\nu \ll \mu$. Použijeme Větu 12.3 pro míry $\nu \leq \mu + \nu$. Existuje tedy měřitelná funkce h, $0 \leq h \leq 1$, taková, že

$$\nu(A) = \int_A h \, d(\mu + \nu) = \int_A h \, d\mu + \int_A h \, d\nu, \quad A \in \mathcal{A},$$

a tedy

$$\int_A (1 - h) \, d\nu = \int_A h \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Standardním postupem snadno odvodíme, že pro každou nezápornou měřitelnou funkci g platí

$$\int g(1 - h) \, d\nu = \int gh \, d\mu.$$

Specielně dostaneme

$$\nu\{h = 1\} = \int_{\{h=1\}} h \, d(\mu + \nu) = \mu\{h = 1\} + \nu\{h = 1\},$$

tedy $\mu\{h = 1\} = 0$, a protože $\nu \ll \mu$, také $\nu\{h = 1\} = 0$. Platí tedy $h < 1$ $(\mu + \nu)$-s.v.

Volbou $g := \frac{1}{1-h}\chi_A$ ve výše uvedené rovnosti dostaneme

$$\nu(A) = \int_A \frac{h}{1 - h} \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

tedy $f = \frac{h}{1-h}$ je hledaná hustota $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Jsou-li μ, ν σ-konečné, existuje rozklad $X = \bigcup_i E_i$ na měřitelné množiny s $\mu(E_i) < \infty$, $\nu(E_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$. Pro konečné restrikce $\nu|E_i \ll \mu|E_i$ najdeme hustoty f_i na E_i, a výslednou hustotu sestrojíme jako

$$f(x) := f_i(x), \quad x \in E_i, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

$\square$

Pozn.: Hustota $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ je určena jednoznačně modulo ekvivalence $\sim$ (viz Důsledek 6.2).

Definice 12.3. Řekneme, že dvě míry μ, ν na témže měřitelném prostoru $(X, \mathcal{A})$ jsou *vzájemně singulární*, nebo také *ortogonální* (píšeme $\mu \perp \nu$), jestliže existuje množina $S \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(S) = 0$ a $\nu(X \setminus S) = 0$.

Příklady:

1. Je-li $x \neq y$, pak pro Diracovy míry platí $\delta_x \perp \delta_y$.
2. $\lambda^1 \perp \delta_x$ pro každý $x \in \mathbb{R}$.
3. $\lambda^1 \perp \mu$, kde μ je aritmetická míra na množině celých čísel.

Věta 12.4 (Rozklad míry na absolutně spojitou a singulární část)**.** *Buďte μ, ν dvě σ-konečné míry na témže měřitelném prostoru. Pak existuje rozklad $\nu = \nu_a + \nu_s$ na míry ν_a, ν_s takový, že $\nu_a \ll \mu$ a $\nu_s \perp \mu$. Míry ν_a a ν_s jsou jednoznačně určeny.*

Pozn.: Míra ν_a se nazývá *absolutně spojitá část* a míra ν_s *singulární část* míry ν vzhledem k μ.

Důkaz. Buď $f_\mu := \frac{d\mu}{d(\mu+\nu)}$ Radon-Nikodýmova hustota. Označme $A := \{f_\mu > 0\}$ a $B := \{f_\mu = 0\}$; zřejmě $X = A \cup B$ je rozklad. Dále položme

$$\nu_a(\cdot) := \nu(\cdot \cap A), \qquad \nu_s(\cdot) := \nu(\cdot \cap B).$$

Zřejmě $\nu = \nu_a + \nu_s$. Dále platí $\nu_s(A) = 0$ a $\mu(B) = 0$, tedy $\nu_s \perp \mu$. A pokud $\mu(E) = 0$ pro nějakou měřitelnou množinu E, pak

$$0 = \mu(E) = \int_E f_\mu \, d(\mu + \nu),$$

tedy $f_\mu = 0$ ν-s.v. na E, což znamená, $\nu(E \cap A) = 0$ (podle definice A), tedy $\nu_a(E) = 0$. Je tedy $\nu_a \ll \mu$.

Ukážeme ještě jednoznačnost rozkladu. Nechť $\nu = \nu_a' + \nu_s'$ je jiný rozklad takový, že $\nu_a' \ll \mu$ a $\nu_s' \perp \mu$. Ukážeme, že

$$\nu_s'(A) = 0 = \nu_a'(B). \tag{2}$$

Z toho pak plyne pro každou $E \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \nu_s'(E) &= \nu_s'(E \cap B) = \nu_s'(E \cap B) + \nu_a'(E \cap B) = \nu(E \cap B) = \nu_s(E), \\ \nu_a'(E) &= \nu_a'(E \cap A) = \nu_a'(E \cap A) + \nu_s'(E \cap A) = \nu(E \cap A) = \nu_a(E). \end{aligned}$$

Stačí tedy ověřit (2). Protože $\nu_s' \perp \mu$, existuje měřitelná množina S taková, že $\mu(S) = 0$ a $\nu_s'(X \setminus S) = 0$. Pak

$$0 = \mu(S \cap A) = \int_{S \cap A} f_\mu \, d(\mu + \nu).$$

Protože $f_\mu > 0$ na A, musí být $(\mu + \nu)(S \cap A) = 0$, tedy i $\nu(S \cap A) = 0$ a $\nu_s'(S \cap A) = 0$, tudíž $\nu_s'(A) = \nu_s'(A \cap S) + \nu_s'(A \setminus S) = 0$. Dále (z definice B) platí $\mu(B) = 0$ a $\nu_a' \ll \mu$, tedy i $\nu_a'(B) = 0$. Tím je (2) ověřeno a důkaz ukončen. $\square$

13 Věta o rozšíření míry

Definice 13.1. Nezáporná množinová funkce $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definovaná na *algebře* množin $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je *konečně aditivní*, jestliže $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, kdykoliv $A, B \in \mathcal{A}$ a $A \cap B = \emptyset$.

Pozn.: Konečně aditivní množinová funkce je zřejmě monotónní (tedy $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$).

Příklad: Množinová funkce

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & A \subset \mathbb{N} \text{ konečná}, \\ \infty, & A \subset \mathbb{N} \text{ nekonečná} \end{cases}$$

je konečně aditivní množinová funkce na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, která není σ-aditivní.

Definice 13.2. Nechť $X \neq \emptyset$ a $\mathcal{A}$ je algebra podmnožin X. Řekneme, že funkce $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ je *pramíra*, jestliže

(i) $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$,

(ii) pro libovolné množiny $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní a takové, že i $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, platí

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i).$$

Pozn.: Vlastnost (ii) budeme nazývat σ-aditivitou, stejně jako u míry. Rozdíl je v tom, že na algebře musíme navíc předpokládat, že i spočetné sjednocení množin leží v algebře.

Věta 13.1 (Hahn-Kolmogorovova věta o rozšíření míry)**.** *Buď $\tilde{\mu}$ pramíra na algebře $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X. Pak existuje míra μ na $\sigma\mathcal{A}$ taková, že $\tilde{\mu} = \mu$ na $\mathcal{A}$. Je-li $\tilde{\mu}$ σ-konečná, je μ jednoznačně určena.*

[Bez důkazu (bude v navazující přednášce)]

Tvrzení 13.2. *Buď $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \to [0, \infty)$* konečná*, konečně aditivní funkce na algebře $\mathcal{A}$ splňující $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Pak $\tilde{\mu}$ je σ-aditivní právě tehdy, když*

$$A_i \in \mathcal{A},\, A_i \searrow \emptyset \implies \tilde{\mu}(A_i) \to 0. \tag{3}$$

Pozn: Vlastnosti (3) se říká spojitost $\tilde{\mu}$ v prázdné množině.

Důkaz. $\implies$: Nechť $\tilde{\mu}$ je σ-aditivní a $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \searrow \emptyset$. Pak $A_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \setminus A_{i+1})$ a množiny $A_i \setminus A_{i+1}$ jsou po dvou disjunktní, tedy

$$\tilde{\mu}(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i \setminus A_{i+1}) < \infty.$$

Rovněž platí $A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty}(A_i \setminus A_{i+1})$, tedy

$$\tilde{\mu}(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i \setminus A_{i+1}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

$\Longleftarrow$: Nechť nyní platí (3), $B_i \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní a $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$. Pro množiny $A_n := A \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n)$ platí $A_n \searrow \emptyset$, tedy $\tilde{\mu}(A_n) \to 0$. Z konečné aditivity $\tilde{\mu}$ máme

$$\tilde{\mu}(A) - \tilde{\mu}(A_n) = \tilde{\mu}(A \setminus A_n) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mu}(B_i),$$

a limitním přechodem $n \to \infty$ dostaneme $\tilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_i)$. $\square$

Přednáška 19.12.2023

Příklad:

1. Označme symbolem $\mathcal{A}_0$ systém podmnožin $\mathbb{R}$ obsahující prázdnou množinu a všechna konečná sjednocení intervalů typu $(a, b]$ a (a, ∞), $a \in [-\infty, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$. Lze snadno nahlédnout, že $\mathcal{A}_0$ je algebra, a definujme množinovou funkci $\tilde{\lambda}$ na $\mathcal{A}_0$ jako součet délek příslušných (disjunktních) intervalů. Lze ukázat, že $\tilde{\lambda}$ je σ-aditivní množinová funkce, tedy pramíra, a jejím rozšířením na $\sigma\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ je Lebesgueova míra λ^1.

2. Na algebře $\mathcal{A}_0$ z předchozího příkladu uvažujme množinovou funkci

$$\tilde{\mu}(A) := \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ \infty, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

   $\tilde{\mu}$ je zřejmě pramíra, nemá ale jednoznačné rozšíření na $\sigma\mathcal{A}_0$. Jedním možným rozšířením je míra definovaná stejným předpisem jako $\tilde{\mu}$ (tedy 0 pro prázdnou množinu a ∞ pro všechny neprázdné množiny), jiným rozšířením je aritmetická míra, nebo její libovolný kladný násobek.

Příklad. Položme $X := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (posloupnosti $0 - 1$) a pro $n \in \mathbb{N}$ označme $\Pi_n : X \to \{0, 1\}^n$ projekci do prvních n souřadnic. Dále označme

$$\mathcal{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n^{-1}(\mathcal{P}\{0, 1\}^n).$$

Systém $\mathcal{A}$ tvoří algebru a definujeme na ní množinovou funkci předpisem: Je-li $A \in \mathcal{A}$, pak $A = \Pi_n^{-1}(B)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $B \subset \{0, 1\}^n$; klademe

$$\tilde{\mu}(A) := \frac{\operatorname{card} B}{2^n}.$$

$\tilde{\mu}$ je korektně definovaná konečně aditivní množinová funkce.

Na množině X zavedeme metriku

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}, \quad x, y \in X.$$

Potřebujeme tyto znalosti z matematické analýzy (cvičení):

1. Konvergence posloupnosti v (X, d) je ekvivalentní konvergenci posloupností všech souřadnic.

2. (X, d) je kompaktní metrický prostor.

3. Každá množina $A \in \mathcal{A}$ je otevřená i uzavřená v (X, d).

Jsou-li $A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $A_n \searrow \emptyset$, pak z kompaktnosti A_n plyne, že existuje n_0 takové, že $A_n = \emptyset$ pro $n > n_0$. Pak ale jistě $\tilde{\mu}(A_n) \to 0$, je tedy splněna podmínka (3) a tudíž $\tilde{\mu}$ je pramíra. Podle Hahn-Kolmogorovovy věty tedy existuje její jednoznačné rozšíření na míru μ na $\mathcal{B} := \sigma\mathcal{A}$. Míra μ je pravděpodobnostní míra a má význam rozložení pravděpodobnosti pro posloupnost nezávislých opakování pokusu hodu mincí.

14 Distribuční funkce

Definice 14.1. Buď μ konečná borelovská míra na $\mathbb{R}$. Pak

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

je *distribuční funkce* míry μ.

Tvrzení 14.1. (1) *F_μ je neklesající,*

(2) *$F(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) = 0$, $F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F_\mu(x) < \infty$,*

(3) *F_μ je zprava spojitá.*

Důkaz: Tvrzení snadno plyne z monotonie a spojitosti míry. □

Věta 14.2. *Nechť funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má vlastnosti (1), (2) a (3). Pak existuje právě jedna konečná borelovská míra μ na $\mathbb{R}$ taková, že $F_\mu = F$.*

Důkaz: Buď $\mathcal{A}_0$ algebra generovaná intervaly $(a, b]$, (a, ∞), $a \in [-\infty, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$. Každou množinu $A \in \mathcal{A}_0$ můžeme vyjádřit jako disjunktní konečné sjednocení $A = \bigcup_{i=1}^k (a_i, b_i]$ a definujeme množinovou funkci na $\mathcal{A}_0$ předpisem

$$\tilde{\mu}(A) := \sum_{i=1}^k (F(b_i) - F(a_i)).$$

Snadno lze ověřit, že $\tilde{\mu}$ je korektně definovaná a konečně aditivní na $\mathcal{A}_0$. Ukážeme, že $\tilde{\mu}$ je pramíra. K tomu stačí ukázat spojitost v prázdné množině. Nechť tedy $A_n \in \mathcal{A}_0$, $A_n \searrow \emptyset$, a buď $\varepsilon > 0$ dáno. Protože F má konečné limity v $-\infty$ a ∞, existuje $M > 0$ takové, že

$$F(-M) + (F(\infty) - F(M)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

a tedy omezené množiny $B_n := A_n \cap (-M, M] \in \mathcal{A}_0$ splňují

$$\tilde{\mu}(B_n) \geq \tilde{\mu}(A_n) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vyjádřeme B_n ve tvaru disjunktního sjednocení $B_n := \bigcup_{i=1}^{k_n} (a_i^n, b_i^n]$ (zde $a_i^n, b_i^n \in \mathbb{R}$). Protože F je zprava spojitá, existuje $\delta_n > 0$ takové, že pro množinu $C_n := \bigcup_{i=1}^{k_n} (a_i^n + \delta_n, b_i^n]$ platí

$$\tilde{\mu}(B_n \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Množiny $K_n := \overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_n}$ jsou kompaktní a splňují

$$K_n \searrow \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{C_i} \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset,$$

tedy existuje n, pro něž je $K_n = \emptyset$, a tedy i $C_1 \cap \cdots \cap C_n = \emptyset$. Pak platí

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(B_n) &= \tilde{\mu}\left(B_n \setminus \bigcap_{i=1}^{n} C_i\right) \\
&= \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (B_n \setminus C_i)\right) \\
&\le \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (B_i \setminus C_i)\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mu}(B_i \setminus C_i) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Celkem tedy máme $\tilde{\mu}(A_n) < \varepsilon$, a protože ε bylo zvoleno libovolně malé, dokázali jsme, že $\tilde{\mu}(A_n) \searrow 0$. $\tilde{\mu}$ je tedy konečná pramíra na $\mathcal{A}_0$ a podle Hahn-Kolmogorovovy věty existuje právě jedno rozšíření na míru μ na $\sigma\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

Příklady:

1. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1 & x \ge a, \end{cases}$ je distribuční funkce Diracovy míry δ_a.

2. Jsou-li $-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_k < \infty$ a $t_1, \ldots, t_k > 0$, pak

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1, \\ t_1 + \cdots + t_i, & x \in [a_i, a_{i+1}),\ i = 1, \ldots, k-1, \\ t_1 + \cdots + t_k, & x \ge a_k, \end{cases}$$

   je distribuční funkce míry $\mu = t_1\delta_{a_1} + \cdots + t_k\delta_{a_k}$.

3. Je-li $f \in L^1(\lambda)$, $f \ge 0$, pak

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

   je distribuční funkce míry $\mu(B) = \int_B f(t)\, dt$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definice 14.2. Konečná borelovská míry μ na $\mathbb{R}$ je

- *diskrétní*, jestliže existuje spočetná množina $S \subset \mathbb{R}$ taková, že $\mu(\mathbb{R} \setminus S) = 0$;
- *neatomická*, jestliže $\mu(\{x\}) = 0$ pro každý $x \in \mathbb{R}$.

Cvičení:

1. Je-li μ zároveň diskrétní a neatomická, je nulová.
2. Každá diskrétní míra je tvaru $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} t_i \delta_{a_i}$ pro nějaké $t_i \geq 0$ a $a_i \in \mathbb{R}$, $\sum_i t_i < \infty$.
3. μ je neatomická $\iff$ F je spojitá.

Přednáška 9.1.2024

Příklad: Cantorova funkce Položme $C_0 = [0,1]$ a indukcí definujme množiny

$$C_n = \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

(platí $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$ a C_n jsou neprázdné kompaktní). Množina

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

se nazývá *Cantorovo diskontinuum.* Platí:

- $\lambda^1(C) = 0$,
- Číslo $x \in [0,1]$ patří do C právě tehdy, když je lze vyjádřit ve trojkovém rozvoji $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j}$ s pomocí číslic $x_j \in \{0, 2\}$, $j = 1, 2, \dots$.

Buď $C \subset [0,1]$ Cantorovo diskontinuum. *Cantorovu funkci F_C* definujeme následovně. Klademe $F_C(x) = 0$ pro $x \leq 0$ a $F_C(x) = 1$ pro $x \geq 1$. Dále $x \in (0,1)$ vyjádříme v trojkovém rozvoji

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j} \quad (x_j \in \{0, 1, 2\}),$$

označíme $n(x) := \inf\{j \in \mathbb{N} : x_j = 1\}$ a klademe

$$F_C(x) := \sum_{j=1}^{n(x)} \frac{\min\{x_j, 1\}}{2^j}, \quad x \in (0,1).$$

(Je třeba ověřit, že hodnota $F_C(x)$ je korektně, tedy jednoznačně určená, i když x nemá jednoznačný rozvoj v trojkové soustavě!)

Funkce F_C je spojitá, neklesající a je distribuční funkcí *Cantorovy míry μ_C*, která je neatomická, ale přitom je singulární vzhledem k Lebesgueově míře.

Ukažme nejprve monotonii F_C. Buďte $0 \leq x < y \leq 1$, $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 3^{-j}$, $y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j 3^{-j}$, a nechť $x_j = y_j$ pro $1 \leq j < j_0$ a $x_{j_0} < y_{j_0}$. Pokud $x_j = y_j = 1$ pro některé $j < j_0$, pak zřejmě $F_C(x) = F_C(y)$. Nechť naopak $n(x), n(y) \geq j_0$, a označme $q := \sum_{j=1}^{j_0-1} 2^{-j} \min\{1, x_j\}$. Je-li $x_{j_0} = 0$, a tedy $y_{j_0} = 1$ nebo 2, pak $F_C(x) \leq q + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{-j} = q + 2^{-j_0} \leq F_C(y)$. Pokud $x_{j_0} = 1$ a $y_{j_0} = 2$, pak $F_C(x) = q + 2^{-j_0} \leq F_C(y)$. Tím je ověřeno, že F_C je neklesající.

Nyní ukážeme spojitost F_C. Pokud $x, y \in [0,1]$ náleží témuž triadickému intervalu $[k3^{-j}, (k+1)3^{-j}]$, pak $|F_C(y) - F_C(x)| \leq 2^{-j}$. Platí-li $|x - y| \leq 3^{-j}$ pak x, y patří do téhož nebo do dvou sousedních triadických intervalů délky 3^{-j}, a tedy $|F_C(y) - F_C(x)| \leq 2^{-j+1}$. Tedy F je (stejnoměrně) spojitá.

Konečně ukážeme, že $\mu_C([0,1] \setminus C = 0$. Množinu $[0,1] \setminus C$ lze zapsat jako spočetné sjednocení otevřených triadických intervalů, které lze popsat v triadickém rozvoji jako množina posloupností, které mají (nutně) na daném j-tém místě jedničku, a předtím pouze nuly a dvojky. Na takových intervalech je ale funkce F_C z definice konstantní, tedy míra F_C těchto intervalů, i jejich sjednocení, je nulová.

Pozn.: Každou konečnou borelovskou míru μ na $\mathbb{R}$ lze rozložit na součet

$$\mu = \mu_a + \mu_c + \mu_d,$$

kde $\mu_a \ll \lambda$, μ_d je diskrétní a μ_c neatomická s vlastností $\mu_c \perp \lambda$.

Tvrzení 14.3. *Nechť distribuční funkce F konečné míry μ má všude vlastní derivaci $F' =: f$. Pak $\mu \ll \lambda$ a $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$.*

Důkaz: Označme $\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}^1 : \mu(B) = \int_B f(x)\,dx\}$. Z vlastnosti

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

plyne, že $\mathcal{D}$ obsahuje všechny intervaly typu $(a,b]$. Protože systém těchto intervalů je uzavřen na konečné průniky a generuje borelovskou σ-algebru, a protože $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém, je $\mathcal{D} = \mathcal{B}^1$, a tedy f je Radon-Nikodymova hustota μ vzhledem k λ^1. □

Pozn.:

1. Podmínka existence derivace distribuční funkce všude není nutná pro absolutní spojitost (vzhledem k λ). Např.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

   je distribuční funkcí absolutně spojité míry $\mu(\cdot) = \lambda(\cdot \cap (0,1))$.

2. Každá monotónní funkce, a tedy i každá distribuční funkce, má derivaci v λ-skoro všech bodech.

3. Lze ukázat, že nutnou a postačující podmínkou pro absolutní spojitost $\mu \ll \lambda$ je *absolutní spojitost* distribuční funkce F: pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x_1 < y_1 < \cdots < x_n < y_n$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) < \delta \implies \sum_{i=1}^{n} |F(y_i) - F(x_i)| < \varepsilon.$$

Definice 14.3 (Lebesgue-Stieltjesův integrál)**.** Je-li F distribuční funkce konečné míry μ a $f \in L^1(\mu)$, píšeme

$$\int f(x)\,dF(x) := \int f(x)\,d\mu(x).$$

Je-li navíc $a < b$, značíme

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) := \int_{(a,b]} f(x)\,d\mu(x).$$

Věta 14.4 (Per partes pro Lebesgue-Stieltjesův integrál)**.** *Jsou-li F, G dvě distribuční funkce a $a < b$, platí*

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b F(x_-)\,dG(x) + \int_a^b G(x)\,dF(x),$$

kde $F(x_-) := \lim_{y \to x_-} F(y)$.

Důkaz: S využitím Fubiniho věty dostaneme

$$\begin{aligned}
&(F(b) - F(a))(G(b) - G(a)) = \int_{(a,b]^2} d(\mu_F \otimes \mu_G)\\
&= \int_a^b \int_a^b \chi_{\{x<y\}}\,dF(x)\,dG(y) + \int_a^b \int_a^b \chi_{\{x \geq y\}}\,dG(y)\,dF(x)\\
&= \int_a^b \int_{(a,y)} dF(x)\,dG(y) + \int_a^b \int_a^x dG(y)\,dF(x)\\
&= \int_a^b (F(y_-) - F(a))\,dG(y) + \int_a^b (G(x) - G(a))\,dF(x)\\
&= \int_a^b F(x_-)\,dG(x) + \int_a^b G(x)\,dF(x) - F(a)(G(b) - G(a)) - G(a)(F(b) - F(a)),
\end{aligned}$$

a odečtením dostaneme dokazovanou rovnost. □

Příklady:

1. Mají-li F i G derivaci na $\mathbb{R}$, dostaneme z věty 14.4 a tvrzení 14.3

   $$[FG]_a^b = \int_a^b F(x)G'(x)\,dx + \int_a^b F'(x)G(x)\,dx,$$

   což je klasický vzorec per partes.

2. Pro Cantorovu funkci F_C platí symetrie $F_C(1-x) = 1 - F_C(x)$, $x \in (0,1)$, z čehož snadno dostaneme $\int_0^1 F_C(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Použitím vzorce per partes pak dostaneme

   $$1 = \int_0^1 x\,dF_C(x) + \int_0^1 F_C(x)\,dx,$$

   tedy $\int_0^1 x\,dF_C(x) = \frac{1}{2}$.

Pozn.: Lebesgue-Stieltjesův integrál lze definovat i podle rozdílu dvou distribučních funkcí, což jsou zprava spojité *funkce s konečnou variací*.