Teorie míry a integrálu 2
ZS 2021/22

Jan Rataj

14. června 2022

Přednáška 5.10.2021

0 Úvod

Připomenutí některých vět z Teorie míry a integrálu 1:

Věta 0.1 (Lebesgueova míra)**.** *Existuje právě jedna borelovská míra λ^n na $\mathbb{R}^n$ taková, že pro všechna $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$, platí*

$$\lambda^n([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Poznámky:

1. Lebesgueova míra je translačně a rotačně invariantní (tzn. $\lambda^n(B) = \lambda^n(B+z) = \lambda^n(\rho B)$ pro všechna posunutí $z \in \mathbb{R}^n$ a pro všechny rotace $\rho \in SO(n)$).
2. Lebesgueova míra je zřejmě σ-konečná.
3. Značíme $\mathcal{B}_0^n$ zúplnění $\mathcal{B}^n$ vzhledem k λ^n. Platí $\mathcal{B}^n \subsetneq \mathcal{B}_0^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.
4. Lebesgueova míra je regulární v tomto smyslu (důkaz bude později): *Ke každé $E \in \mathcal{B}_0^n$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují G otevřená, F uzavřená, $F \subset E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon$.*

Definice 0.1. Nechť $X \neq \emptyset$ a $\mathcal{A}$ je algebra podmnožin X. Řekneme, že funkce $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ je *pramíra*, jestliže

(i) $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$,

(ii) pro libovolné množiny $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní a takové, že i $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$, platí
$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \tilde{\mu}(A_i).$$

Věta 0.2 (Hahn-Kolmogorovova věta o rozšíření míry). *Buď $\tilde{\mu}$ pramíra na algebře $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X. Pak existuje míra μ na $\sigma\mathcal{A}$ taková, že $\tilde{\mu} = \mu$ na $\mathcal{A}$. Je-li $\tilde{\mu}$ σ-konečná, je μ jednoznačně určena.*

1 Konstrukce Lebesgueovy míry z vnější míry

Definice 1.1 (Vnější míra). Nechť X je neprázdná množina. Pak funkce $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ je *vnější míra* na X, jestliže

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotonie),

(iii) $A_n \subset X$ $(n \in \mathbb{N}) \implies \mu^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$ (spočetná subaditivita).

Příklady:

1. Nulová míra, Diracova míra v bodě nebo aritmetická míra jsou rovněž vnější míry.

2. $$\mu^*(A) := \begin{cases} 0 & \text{pokud } A = \emptyset, \\ 1 & \text{pokud } A \neq \emptyset \end{cases}$$

3. $$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_n \text{délka}(I_n) : A \subset \bigcup_n I_n,\ I_n \text{ otevř. int.} \right\},\ A \subset \mathbb{R},$$

   je vnější míra na $\mathbb{R}$. (Cvičení)

Definice 1.2. Řekneme, že množina $A \subset X$ je μ^**-měřitelná*, jestliže

$$\forall T \subset X : \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A).$$

Značíme $\mathcal{A}_{\mu^*} := \{A \subset X : A \text{ je } \mu^*\text{-měřitelná}\}$.

Pozn.: Nerovnost $\mu^*(T) \leq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$ platí vždy (ze subaditivity), proto v definici lze ekvivalentně požadovat

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A), \quad T \subset X.$$

Pozn.: Je-li μ^* vnější míra na X a $Y \subset X$, pak restrikce $\mu^*\lfloor Y : A \mapsto \mu^*(A \cap Y)$ je rovněž vnější míra na X a platí $\mathcal{A}_{\mu^*} \subset \mathcal{A}_{\mu^*\lfloor Y}$.

Věta 1.1 (Caratheodory). *$\mathcal{A}_{\mu^*}$ je σ-algebra, $\mu := \mu^*|\mathcal{A}_{\mu^*}$ je míra a prostor $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$ je úplný.*

Důkaz. 1. $\emptyset \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ (zřejmé)

2. $A \in \mathcal{A}_{\mu^*} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ (zřejmé z definice)

3. $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*} \implies A \cap B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$:
   Pro libovolnou množinu $T \subset X$ platí:

$$\begin{aligned} \mu^*(T) &= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A), \\ \mu^*(T \cap A) &= \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*((T \cap A) \setminus B), \\ \mu^*(T \setminus (A \cap B)) &= \mu^*(T \setminus (A \cap B) \cap A) + \mu^*(T \setminus (A \cap B) \setminus A) \\ &= \mu^*((T \cap A) \setminus B) + \mu^*(T \setminus A). \end{aligned}$$

   Dosazením z druhé a čtvrté rovnosti do první dostaneme

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*(T \setminus (A \cap B)),$$

   tedy $A \cap B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Z dokázaných vlastností už plyne, že $\mathcal{A}_{\mu^*}$ je algebra.

4. μ^* je σ-aditivní na $\mathcal{A}_{\mu^*}$:
   Buďte $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ po dvou disjunktní. Ukážeme, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Protože A_1 je μ^*-měřitelná, volbou $T = A_1 \cup A_2$ dostaneme

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

   Tedy μ^* je konečně aditivní na $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Platí tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i) = \lim_{n \to \infty} \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \le \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right).$$

   Opačná nerovnost plyne ze spočetné subaditivity, platí tedy

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

5. $\mathcal{A}_{\mu^*}$ je uzavřeno na disjunktní spočetná sjednocení:
   Buďte $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ po dvou disjunktní a $T \subset X$. Platí ($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \mu^*(T) &= \mu^* \left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) + \mu^* \left(T \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \\ &\ge \mu^* \left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + (\mu^* \lfloor T) \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \\ &= \mu^* \left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) + \sum_{i=1}^{n} (\mu^* \lfloor T)(A_i) \end{aligned}$$

Využili jsme faktu, že $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*\lfloor T}$, a toho, že $\mu^*\lfloor T$ je (σ-)aditivní na $\mathcal{A}_{\mu^*\lfloor T}$, podle již dokázané části 4. Limitním přechodem $n \to \infty$ pak dostaneme

$$\begin{aligned}\mu^*(T) &\geq \mu^*\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \sum_{i=1}^{\infty}(\mu^*\lfloor T)(A_i) \\ &= \mu^*\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \mu^*\left(T \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).\end{aligned}$$

Tedy $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Z dokázaného již plyne, že $\mathcal{A}_{\mu^*}$ je σ-algebra a μ^* je míra na $\mathcal{A}_{\mu^*}$.

6. $\mu^*(A) = 0 \implies A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$:
   Jestliže $\mu^*(A) = 0$, pak

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \setminus A) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A),$$

tedy $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Všechny nulové množiny jsou tedy μ^*-měřitelné.

□

Přednáška 12.10.2021

Příklady:

1. μ^* je nulová míra, Diracova míra v bodě nebo aritmetická míra na množině X: $\mathcal{A}_{\mu^*} = \mathcal{P}(X)$.

2. $\mu^*(A) := \begin{cases} 0 & \text{pokud } A = \emptyset, \\ 1 & \text{pokud } A \neq \emptyset \end{cases} \implies \mathcal{A}_{\mu^*} = \{\emptyset, X\}$.

Definice 1.3 (Metrická vnější míra)**.** Buď (X, ρ) metrický prostor. Řekneme, že vnější míra μ^* na X je *metrická*, jestliže pro dvě množiny $A, B \subset X$ splňující $\operatorname{dist}(A, B) > 0$ platí

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Zde $\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Věta 1.2. *Nechť μ^* je metrická vnější míra na metrickém prostoru (X, ρ). Pak $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$.*

Důkaz. Buď $F \subset X$ uzavřená. Ukážeme, že $F \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Označme

$$F_\varepsilon := \{x \in X : \rho(x, F) \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Nechť je dána $T \subset X$. Ověříme, že

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap F) + \mu^*(T \setminus F). \tag{1}$$

Můžeme předpokládat, že $\mu^*(T) < \infty$ (jinak nerovnosti zřejmě platí). Protože $\operatorname{dist}(T \cap F, T \setminus F_\varepsilon) \geq \varepsilon > 0$, platí

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap F) + \mu^*(T \setminus F_\varepsilon), \quad \varepsilon > 0,$$

protože μ^* je metrická. Ukážeme, že

$$\mu^*(T \setminus F_{1/j}) \to \mu^*(T \setminus F),\ j \to \infty. \tag{2}$$

Z toho už bude plynout (1). Označme

$$D_i := (F_{1/i} \setminus F_{1/(i+1)}) \cap T, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Platí

$$T \setminus F = (T \setminus F_{1/j}) \cup \bigcup_{i=j}^{\infty} D_i,$$

a tedy ze spočetné subaditivity μ^* plyne

$$\mu^*(T \setminus F) \leq \mu^*(T \setminus F_{1/j}) + \sum_{i=j}^{\infty} \mu^*(D_i).$$

Ukážeme, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(D_i) < \infty. \tag{3}$$

Z toho již bude plynout (2), a tedy i (1). Je-li $|i-j| > 2$ je $\operatorname{dist}(D_i, D_j) > 0$ a tedy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(D_{2i}) &= \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} D_{2i}\right) \le \mu^*(T) < \infty, \\ \sum_{i=1}^{n} \mu^*(D_{2i-1}) &= \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} D_{2i-1}\right) \le \mu^*(T) < \infty. \end{aligned}$$

Z obou nerovností již plyne (3) a důkaz je tedy hotov. □

Definice 1.4. Symbolem $\mathcal{O}_n$ budeme značit množinu všech otevřených omezených kvádrů v $\mathbb{R}^n$ (včetně prázdné množiny). Objem kvádru $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \in \mathcal{O}_n$, budeme značit

$$v(I) := (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n).$$

Tvrzení 1.3. *Buďte $I, I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{O}_n$.*

(i) *Je-li $I \subset \overline{I_1} \cup \cdots \cup \overline{I_k}$, platí $v(I) \le v(I_1) + \cdots + v(I_k)$.*

(ii) *Je-li $\overline{I} = \overline{I_1} \cup \cdots \cup \overline{I_k}$ a jsou-li kvádry $I_1, \ldots, I_k$ po dvou disjunktní, platí $v(I) = v(I_1) + \cdots + v(I_k)$.*

Důkaz. 1. Nechť $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, $\mathcal{D}_i$ je dělení intervalu (a_i, b_i), $i = 1, \ldots, n$, a označme symbolem $\mathcal{J}$ systém všech otevřených kvádrů $J_1 \times \cdots \times J_n$, kde J_i je otevřený interval z dělení $\mathcal{D}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Pak zřejmě

$$\overline{I} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} \overline{J}, \quad v(I) = \sum_{J \in \mathcal{J}} v(J).$$

2. Jsou-li $I_1, \ldots, I_k$ jako v (ii), převedeme situaci snadno na případ uvažovaný v 1. Tím je dokázán bod (ii).

3. (i) plyne z (ii): z libovolného pokrytí kvádru I kvádry $I_1, \ldots, I_k$ snadno vyrobíme disjunktní pokrytí.

□

Definice 1.5. Pro množinu $E \subset \mathbb{R}^n$ klademe

$$\lambda^{n*}(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,\ I_i \in \mathcal{O}_n,\ i \in \mathbb{N} \right\}$$

a pro $\delta > 0$

$$\lambda_\delta^{n*}(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,\ I_i \in \mathcal{O}_n,\ \operatorname{diam}(I_i) < \delta,\ i \in \mathbb{N} \right\}.$$

(Zde $\operatorname{diam} A = \sup\{\|x-y\| : x, y \in A\}$.)

Tvrzení 1.4. *Pro $E \subset \mathbb{R}^n$ a $\delta > 0$ platí $\lambda^{n*}(E) = \lambda^{n*}_\delta(E)$.*

Důkaz. Nerovnost $\lambda^{n*}(E) \le \lambda^{n*}_\delta(E)$ je zřejmá. Dokažme opačnou nerovnost. Nechť $\lambda^{n*}(E) < \infty$ (jinak by nerovnost zřejmě platila), a zvolme $\varepsilon > 0$. Z definice $\lambda^{n*}(E)$ existují $I_1, I_2, \dots \in \mathcal{O}_n$ takové, že $E \subset \bigcup_i I_i$ a

$$\sum_i v(I_i) < \lambda^{n*}(E) + \varepsilon.$$

Každý z kvádrů I_i můžeme rozdělit na konečný počet disjunktních kvádrů $J_i^1, \dots, J_i^{k(i)}$ s diametry menšími než δ, přitom $\overline{I_i} = \overline{J_i^1} \cup \dots \cup \overline{J_i^{k(i)}}$. Podle Tvrzení 1.3 platí $v(I_i) = v(J_i^1) + \dots + v(J_i^{k(i)})$. Zřejmě existují $I_i^j \in \mathcal{O}_n$ takové, že $\overline{J_i^j} \subset I_i^j$, $\operatorname{diam} I_i^j < \delta$ a $v(I_i^j) < v(J_i^j) + \varepsilon/(k(i)2^i)$, $j = 1, \dots, k(i)$, $i \in \mathbb{N}$. Pak $E \subset \bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{j=1}^{k(i)} I_i^j$, a tedy

$$\lambda^{n*}_\delta(E) \le \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^{k(i)} v(I_i^j) < \sum_{i=1}^\infty v(I_i) + \varepsilon < \lambda^{n*}(E) + 2\varepsilon.$$

Protože tato nerovnost platí pro libovolné $\varepsilon > 0$, platí i $\lambda^{n*}_\delta(E) \le \lambda^{n*}(E)$. $\square$

Věta 1.5. *λ^{n*} je metrická vnější míra na $\mathbb{R}^n$ a platí*

$$\lambda^{n*}(I) = v(I), \quad I \in \mathcal{O}_n.$$

Důkaz. Množinová funkce λ^{n*} je zřejmě monotónní a platí $\lambda^{n*}(\emptyset) = 0$. Ukážeme spočetnou subaditivitu. Buďte $E_i \subset \mathbb{R}^n$ a předpokládejme, že $\lambda^{n*}(E_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle definice λ^{n*} existují $I_i^j \in \mathcal{O}_n$ takové, že $E_i \subset \bigcup_j I_i^j$ a $\sum_j v(I_i^j) < \lambda^{n*}(E_i) + \varepsilon/2^i$, $i \in \mathbb{N}$. Pak ale platí $\bigcup_i E_i \subset \bigcup_i \bigcup_j I_i^j$, a tedy

$$\lambda^{n*}(\bigcup_i E_i) \le \sum_i \sum_j v(I_i^j) < \sum_i \lambda^{n*}(E_i) + \varepsilon.$$

Limitním přechodem $\varepsilon \to 0+$ dostáváme spočetnou subaditivitu. λ^{n*} je tedy vnější míra.

Ukážeme, že λ^{n*} je metrická. Buďte $A, B \subset \mathbb{R}^n$ takové, že $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. Ukážeme, že

$$\lambda^{n*}(A \cup B) \ge \lambda^{n*}(A) + \lambda^{n*}(B).$$

Je-li $\lambda^{n*}(A \cup B) = \infty$, nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy nadále, že $\lambda^{n*}(A \cup B) < \infty$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Tvrzení 1.4 existují $I_i \in \mathcal{O}_n$ takové, že $\operatorname{diam}(I_i) < \operatorname{dist}(A, B)/2$ a $\sum_i v(I_i) < \lambda^{n*}(A \cup B) + \varepsilon$. Označme

$$\mathcal{I}_A := \{i \in \mathbb{N} : I_i \cap A \neq \emptyset\}, \quad \mathcal{I}_B := \{i \in \mathbb{N} : I_i \cap B \neq \emptyset\}.$$

Žádný z kvádrů I_i nemůže zasáhnout obě množiny A, B, proto jsou $\mathcal{I}_A$ a $\mathcal{I}_B$ disjunktní. Dále zřejmě $A \subset \bigcup_{i\in\mathcal{I}_A} I_i$ a $B \subset \bigcup_{i\in\mathcal{I}_B} I_i$, proto

$$\lambda^{n*}(A) + \lambda^{n*}(B) \leq \sum_{i\in\mathcal{I}_A} v(I_i) + \sum_{i\in\mathcal{I}_B} v(I_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) < \lambda^{n*}(A\cup B) + \varepsilon.$$

Limitním přechodem $\varepsilon \to 0+$ dostaneme požadovanou nerovnost.

Zbývá ukázat, že $\lambda^{n*}(I) = v(I)$ kdykoliv $I \in \mathcal{O}_n$. Nerovnost $\lambda^{n*}(I) \leq v(I)$ je zřejmá (stačí zvolit pokrytí $I_1 = I$, $I_2 = I_3 = \cdots = \emptyset$). Předpokládejme pro spor, že $\lambda^{n*}(I) < v(I)$. Pak existují $I_i \in \mathcal{O}_n$ takové, že $I \subset \bigcup_i I_i$ a $\sum_i v(I_i) < v(I)$. Zřejmě existuje $J \in \mathcal{O}_n$ takový, že $\overline{J} \subset I$ a $\sum_i v(I_i) < v(J)$. Protože $\overline{J}$ je kompaktní, existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\overline{J} \subset I_1 \cup \cdots \cup I_k$. Pak ale $v(J) \leq v(I_1) + \cdots + v(I_k)$ podle Tvrzení 1.3, což je spor. $\square$

Pozn.: Z předchozích tří vět plyne, že $\mathcal{B}^n \subset \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ a $\lambda^n = \lambda^{n*}|\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ je n-rozměrná Lebesgueova míra. Tím je dokázána existence ve Větě 0.1. Jednoznačnost plyne z věty o jednoznačnosti míry z přednášky TMI1, důkaz Věty 0.1 je tedy kompletní.

Přednáška 19.10.2021

2 Znaménkové míry

Definice 2.1. Řekneme, že funkce $\sigma : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^*$ je *znaménková míra* na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{A})$, jestliže

(i) $\sigma(\emptyset) = 0$,

(ii) σ nabývá nejvýše jedné z hodnot $-\infty, \infty$,

(iii) (σ-aditivita) pro libovolnou posloupnost po dvou disjunktních množin $A_n \in \mathcal{A}$ platí

$$\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n).$$

Konečná znaménková míra se též nazývá *náboj*.

Pozn.: Je zřejmé, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n)$ v (iii) buď konverguje absolutně, nebo diverguje k $\pm\infty$.

Příklady:

1. Je-li μ míra a ν konečná míra na $(X, \mathcal{A})$, pak $\sigma = \mu - \nu$ je znaménková míra.
2. Je-li μ σ-konečná míra na $(X, \mathcal{A})$ a $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak $\sigma : A \mapsto \int_A f \, d\mu$ je znaménková míra.

Definice 2.2. Buď σ znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$. Řekneme, že množina $A \in \mathcal{A}$ je *kladná* pro σ, jestliže pro každou měřitelnou množinu $E \subset A$ platí $\sigma(E) \geq 0$. Množina $A \in \mathcal{A}$ je *záporná* pro σ, jestliže pro každou měřitelnou množinu $E \subset A$ platí $\sigma(E) \leq 0$.

Pozn.:

1. Nejvýše spočetné sjednocení kladných množin je kladná množina.
2. Měřitelná podmnožina kladné množiny je kladná množina.

Tvrzení 2.1. *Buď σ znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$ a $E \in \mathcal{A}$ množina taková, že $0 < \sigma(E) < \infty$. Pak existuje kladná množina $A \subset E$ taková, že $\sigma(A) > 0$.*

Důkaz. Kdyby sama E byla kladná, položíme $A := E$. Pokud ne, definujeme

$$t_1 := \inf\{\sigma(B) : B \subset E, B \in \mathcal{A}\} < 0$$

a vybereme $E_1 \subset E$ takovou, že $\sigma(E_1) < \max\{t_1/2, -1\}$. Platí $\sigma(E \setminus E_1) = \sigma(E) - \sigma(E_1) > \sigma(E) > 0$, a pokud je množina $E \setminus E_1$ již kladná, vybereme ji za

A a jsme hotovi. Pokud ne, pokračujeme stejnou konstrukcí v množině $E \setminus E_1$, tedy položíme

$$t_2 := \inf\{\sigma(B) : B \subset E \setminus E_1, B \in \mathcal{A}\} < 0,$$

a zvolíme $E_2 \subset E \setminus E_1$ takovou, že $\sigma(E_2) < \max\{t_2/2, -1\}$. Tímto způsobem buď po konečném počtu kroků najdeme kladnou množinu $A \subset E$ kladné míry, nebo sestrojíme posloupnost disjunktních měřitelných množin $E_1, E_2, \dots \subset E$ a posloupnost záporných čísel $t_1, t_2, \dots$ takové, že $\sigma(E_i) < \max\{t_i/2, -1\} < 0$, $i \in \mathbb{N}$.

Položme $A := E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Ze spočetné aditivity dostaneme

$$\sigma(A) + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(E_i) = \sigma(E) > 0,$$

tedy $\sigma(A) > \sigma(E) > 0$ a řada $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(E_i)$ konverguje, tedy nutně $\sigma(E_i) \to 0$. Pak ale i $t_i \to 0$. Ukážeme, že A je kladná. Pro libovolnou $B \subset A$ měřitelnou platí $B \cap E_i = \emptyset$, $i = 1, 2, \dots$, tedy $\sigma(B) \geq t_i$, $i = 1, 2, \dots$, a protože $t_i \to 0$, je $\sigma(B) \geq 0$. □

Věta 2.2 (Hahn-Banachův rozklad)**.** *Buď σ znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$. Pak existuje rozklad $X = P \cup N$ takový, že P je kladná a N záporná množina pro σ.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\sigma(E) < \infty$ pro každou $E \in \mathcal{A}$. (Kdyby ne, pracovali bychom s mírou $-\sigma$.) Položme

$$\lambda := \sup\{\sigma(E) : E \in \mathcal{A}, E \text{ kladná pro } \sigma\}.$$

Zřejmě $\lambda \geq 0$ ($\emptyset$ je kladná). Buďte $A_i \in \mathcal{A}$ kladné takové, že $\sigma(A_i) \to \lambda$ (existence plyne z definice suprema). Pak množina $P := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ je kladná a ze vztahu

$$\sigma(P) = \sigma(A_i) + \sigma(P \setminus A_i) \geq \sigma(A_i), \quad i \in \mathbb{N},$$

plyne $\sigma(P) = \lambda$. Ukážeme dále, že množina $N := X \setminus P$ je záporná. Nechť $B \subset N$ je měřitelná. Kdyby $\sigma(B) > 0$, pak by podle Tvrzení 2.1 existovala měřitelná kladná množina $B' \subset B$, pro niž $\sigma(B') > 0$. Pak by ale $P \cup B'$ byla rovněž kladná množina s mírou

$$\sigma(P \cup B') = \sigma(P) + \sigma(B') > \sigma(B) = \lambda,$$

což by byl spor s definicí λ. □

Definice 2.3 (Jordanův rozklad)**.** Buď σ znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$. Pak (nezáporné) míry $\sigma_+(\cdot) := \sigma(\cdot \cap P)$ a $\sigma_-(\cdot) := -\sigma(\cdot \cap N)$ nazýváme *kladnou* a *zápornou částí* σ a platí

$$\sigma = \sigma_+ - \sigma_-.$$

Míru $|\sigma| := \sigma_+ + \sigma_-$ nazýváme *totální variací* znaménkové míry σ.

Pozn.: Alespoň jedna z měr σ_+, σ_- je konečná.

Tvrzení 2.3. *Je-li $\sigma = \sigma'_+ - \sigma'_-$ jiný rozklad znaménkové míry σ na rozdíl dvou (nezáporných) měr, pak $\sigma'_+ \geq \sigma_+$ a $\sigma'_- \geq \sigma_-$.*

Důkaz. Pro libovolnou $E \in \mathcal{A}$ platí

$$\sigma_+(E) = \sigma(E \cap P) = \sigma'_+(E \cap P) - \sigma'_-(E \cap P) \leq \sigma'_+(E \cap P) \leq \sigma'_+(E).$$

Podobně se ukáže, že $\sigma'_-(E) \geq \sigma_-(E)$. $\square$

Příklad: Nechť $f \in L^1(0,1)$. Pak

$$\sigma : E \mapsto \int_E f(x)\,dx, \quad E \subset [0,1] \text{ borelovská},$$

je znaménková míra a platí

$$\sigma_+(E) = \int_E f^+(x)\,dx,\ \sigma_-(E) = \int_E f^-(x)\,dx,\ |\sigma|(E) = \int_E |f|(x)\,dx.$$

Přednáška 26.10.2021

Věta 2.4 (Regularita Lebesgueovy míry)**.** *Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$. Je ekvivalentní:*

(i) $E \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$.

(ii) *pro každé $\varepsilon > 0$ existují G otevřená, F uzavřená, $F \subset E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon$.*

(iii) *existují množiny $A, B \in \mathcal{B}^n$, $A \subset E \subset B$, $\lambda^n(B \setminus A) = 0$.*

(iv) $E \in \mathcal{B}^n_0$.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii): Předpokládejme nejprve, že $\lambda^n(E) < \infty$. Podle definice λ^{n*} existují $I_i \in \mathcal{O}_n$ takové, že $E \subset \bigcup_i I_i$ a $\sum_i v(I_i) < \lambda^n(E) + \varepsilon/2$. Pak $G := \bigcup_i I_i$ je otevřená množina obsahující E a platí $\lambda^n(G \setminus E) < \varepsilon/2$.

Je-li $\lambda^n(E) = \infty$, platí $E = \bigcup_m E_m$, kde $E_m := [-m, m]^n \cap E$ má konečnou míru, $m = 1, 2, \ldots$. Ke každé E_m najdeme otevřenou množinu $G_m \supset E_m$, $\lambda(G_m \setminus E_m) < \varepsilon/2^{m+1}$. Pak otevřená množina $G := \bigcup_m G_m$ obsahuje E a platí

$$\lambda^n(G \setminus E) \leq \sum_m \lambda^n(G_m \setminus E_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Komplement E^C množiny E je také měřitelný a existuje tedy otevřená množina $H \supset E^C$ taková, že $\lambda^n(H \setminus E^C) = \lambda^n(E \setminus H^C) < \varepsilon/2$. Množina $F := H^C$ je uzavřená a platí $F \subset E \subset G$ a

$$\lambda^n(G \setminus F) = \lambda^n(G \setminus E) + \lambda^n(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii) $\implies$ (iii): Pro každé $j \in \mathbb{N}$ najdeme otevřenou množinu $G_j \supset E$ a uzavřenou $F_j \subset E$ tak, že $\lambda^n(G_j \setminus F_j) < j^{-1}$. Pak $A := \bigcup_j F_j$ a $B := \bigcap_j G_j$ jsou borelovské množiny a platí

$$\lambda^n(B \setminus A) \leq \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}, \quad j \in \mathbb{N},$$

tedy $\lambda^n(B \setminus A) = 0$.

(iii) $\implies$ (iv): Jsou-li $A \subset E \subset B$ jako v (iii), je zřejmě symetrická diference $E \triangle A$ nulová množina, a tedy $E \in \mathcal{B}^n_0$ podle Věty o zúplnění míry.

(iv) $\implies$ (i): σ-algebra $\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ obsahuje borelovské množiny i nulové množiny, obsahuje tedy i zúplněnou σ-algebru $\mathcal{B}^n_0$. □

Věta 2.5 (Luzin)**.** *Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lebesgueovsky měřitelná funkce a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená taková, že $\lambda^n(G) < \varepsilon$ a restrikce $f|G^C$ je spojitá.*

Pozn.: Funkce f nemusí být spojitá v žádném bodě, pouze restrikce na vhodnou množinu je spojitá (vzhledem k této množině) (viz Dirichletova funkce $f = \chi_{\mathbb{Q}}$).

Důkaz. Buď $U_1, U_2, \dots$ posloupnost všech intervalů s racionálnímí koncovými body. Pak pro každé $j \in \mathbb{N}$ je množina $f^{-1}(U_j)$ lebesgueovsky měřitelná, tedy existují množiny $F_j \subset f^{-1}(U_j) \subset G_j$, F_j uzavřená, G_j otevřená, $\lambda^n(G_j \setminus F_j) < \varepsilon/2^j$. Množina $G := \bigcup(G_j \setminus F_j)$ je otevřená a splňuje

$$\lambda^n(G) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \varepsilon.$$

Označme $E := \mathbb{R}^n \setminus G$. Pro restrikci $g := f|E$ dále platí

$$g^{-1}(U_j) = f^{-1}(U_j) \cap E = G_j \cap E, \quad j = 1, 2, \dots.$$

Tedy $g^{-1}(U_j)$ je otevřená podmnožina v prostoru E.

Pro každou otevřenou množinu $U \subset \mathbb{R}$ platí

$$U = \bigcup_{j:\, U_j \subset U} U_j,$$

a tedy $g^{-1}(U) = \bigcup_{\{j:\, U_j \subset U\}} g^{-1}(U_j)$ je otevřená množina v E. Tedy zobrazení g je spojité na metrickém prostoru E. $\square$

Pozn.: Větu nelze zesílit v tom smyslu, že by restrikce f na komplement nějaké *nulové* množiny musela být spojitá. Jako protipříklad slouží $f = \chi_C$, kde $C \subset [0, 1]$ je *diskontinuum kladné míry.* Jeho konstrukce probíhá podobně jako u Cantorova diskontinua, s tím, že "odebíráme menší" otevřené intervaly: Zvolíme posloupnost kladných čísel (a_i) tak, aby $a := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} a_i < 1$, a definujeme indukcí posloupnost do sebe zařazených kompaktních množin $C_0 \supset C_1 \supset \dots$ tak, že $C_0 = [0, 1]$ a C_{n+1} dostaneme tak, že z každé komponenty C_n vyjmeme centrovaný otevřený podinterval délky a_{n+1}. Pak $C := \bigcap_n C_n$ je totálně nesouvislá množina s Lebesgueovou mírou $1 - a$. Aby restrikce $f|E$ byla spojitá, musí E^C obsahovat ve svém vnitřku všechny hraniční body množin C_n, $n = 0, 1, \dots$. Těchto bodů je spočetně, lze tedy zařídit, aby E^C měla libovolně malou Lebesgueovu míru (ale nikoliv nulovou).

3 Regularita borelovských měr

Definice 3.1. Borelovská míra μ na metrickém (případně topologickém) prostoru X je *regulární*, jestliže pro každou $B \in \mathcal{B}(X)$ platí

$$\mu(B) = \inf\{\mu(G) :\ G \supset B, G \text{ otevřená}\}.$$

Pozn.: Uvedená vlastnost se v literatuře též nazývá *vnější regularitou.*

Věta 3.1. *Každá* konečná *borelovská míra na metrickém prostoru je regulární.*

Důkaz. Nechť μ je konečná borelovská míra na metrickém prostoru (X, ρ). Poznamenejme nejprve, že je-li μ regulární, pak pro každou borelovskou množinu B platí také $\mu(B) = \sup\{\mu(F) : F \subset B, F \text{ uzavřená}\}$ (stačí použít vlastnost regularity pro $X \setminus B$). Označme

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}(X) : (\forall \varepsilon > 0)(\exists F \subset B \subset G) : F \text{ uzav.}, G \text{ otev.}, \mu(G \setminus F) < \varepsilon\}.$$

Ukážeme, že $\mathcal{D} = \mathcal{B}(X)$ (čímž bude důkaz ukončen).

Nejprve ukážeme, že $\mathcal{D}$ obsahuje všechny uzavřené množiny. Je-li $F \subset X$ uzavřená, označme $F_k := \{x \in X : \rho(x, F) < 1/k\}$, $k = 1, 2, \ldots$. F_k jsou otevřené množiny a platí $F_k \searrow F$, $k \to \infty$ (protože F je uzavřená), a tedy $\mu(F_k) \to \mu(F)$ ze spojitosti (konečné) míry μ. K libovolnému $\varepsilon > 0$ tedy najdeme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $\mu(F_k \setminus F) < \varepsilon$, a tedy $F \in \mathcal{D}$.

Dále ukážeme, že $\mathcal{D}$ je σ-algebra. Zřejmě $\emptyset \in \mathcal{D}$. Je-li $D \in \mathcal{D}$ a $\varepsilon > 0$, pak existují $F \subset D \subset G$, F uz., G ot., $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$, a tedy také $X \setminus G \subset X \setminus D \subset X \setminus F$, $X \setminus G$ uz., $X \setminus F$ ot., $\mu((X \setminus F) \setminus (X \setminus G)) = \mu(G \setminus F) < \varepsilon$, a tedy $X \setminus D \in \mathcal{D}$.

Jsou-li $D_i \in \mathcal{D}$, $i \in \mathbb{N}$, a $\varepsilon > 0$, pak existují otevřené množiny G_i a uzavřené množiny F_i takové, že $F_i \subset D_i \subset G_i$ a $\mu(G_i \setminus F_i) < \varepsilon/2^i$, $i \in \mathbb{N}$. Pak zřejmě

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$$

a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i \setminus F_i) < \varepsilon.$$

Množina $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ nemusí být uzavřená, ale ze spojitosti míry platí také pro dostatečně velká $N \in \mathbb{N}$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \setminus \bigcup_{i=1}^{N} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i \setminus F_i) < \varepsilon,$$

a tedy $\bigcup_i D_i \in \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ je tudíž σ-algebra, která obsahuje všechny uzavřené množiny, musí tedy obsahovat všechny borelovské množiny. $\square$

Přednáška 2.11.2021

Příklad: Uvažujme prostor $X = \bigcup_i L_i \subset \mathbb{R}^2$ jako podprostor v rovině, kde $L_1, L_2, \dots$ jsou různé přímky procházející počátkem, a borelovskou míru $\mu = \sum_i \lambda^1|_{L_i}$ (součet Lebesgueových měr na přímkách). Míra μ je σ-konečná (jako spočetný součet σ-konečných měr), ale není regulární: jest $\mu(\{0\}) = 0$, ale každá otevřená množina $G \subset X$ obsahující počátek musí obsahovat $U_\varepsilon(0) \cap X$ pro nějaké $\varepsilon > 0$, a tedy $\mu(G) = \sum_i \varepsilon = \infty$. Předpoklad konečnosti ve větě tedy nelze nahradit σ-konečností.

Cvičení: Ukažte, že předpoklad konečnosti ve větě lze nahradit *lokální konečností* míry μ ($\mu(A) < \infty$ pro všechny omezené borelovské množiny $A \subset X$).

Definice 3.2. Borelovská míra μ na metrickém (případně topologickém) prostoru X je *těsná*, jestliže pro každou $B \in \mathcal{B}(X)$ platí

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B, K \text{ kompaktní}\}.$$

Pozn.:

1. Borelovská míra, která je regulární, těsná a konečná na kompaktech, se nazývá *Radonova míra*.
2. μ konečná a těsná $\implies$ μ regulární.
3. μ konečná, regulární a $\mu(X) = \sup\{\mu(K) : K \subset X \text{ kompaktní}\} \implies \mu$ těsná.

Věta 3.2. *Každá konečná borelovská míra na úplném separabilním metrickém prostoru je těsná.*

Důkaz. Stačí ověřit, že

$$\mu(X) = \sup\{\mu(K) : K \subset X \text{ kompaktní}\}.$$

Protože X je separabilní, existuje spočetná hustá podmnožina $\{x_1, x_2, \dots\} \subset X$. Pro každé n tedy platí $X = \bigcup_i U_{1/n}(x_i)$ ($U_{1/n}(x_i)$ značí otevřené $1/n$-okolí bodu x_i). Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Ze spojitosti (konečné) míry dostaneme, že ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje $k_n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} U_{1/n}(x_i)\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Množina

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} U_{1/n}(x_i)$$

je *totálně omezená*, stejně jako její uzávěr $\overline{A}$. Navíc $\overline{A}$ je jako uzavřená podmnožina úplného prostoru také úplný podprostor. Protože úplnost a totální omezenost dává kompaktnost (viz přednáška MA4), množina $\overline{A}$ je kompaktní. Dále platí

$$
\begin{aligned}
\mu(X \setminus \overline{A}) &\le \mu(X \setminus A) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} U_{1/n}(x_i)\right)\right) \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} U_{1/n}(x_i)\right) < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

$\square$

Příklad: Lebesgueova míra na intervalu $[0, 1]$ s diskrétní metrikou je regulární, ale není těsná.

4 Věta o rozšíření míry

Připomeňme, že *pramíra* je nezáporná množinová funkce na algebře podmnožin množiny X, která je nulová v prázdné množině a spočetně aditivní na dané algebře.

Věta 4.1 (Hahn-Kolmogorovova)**.** *Buď $\tilde{\mu}$ pramíra na algebře $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X. Pak existuje míra μ na $\sigma\mathcal{A}$ taková, že $\tilde{\mu} = \mu$ na $\mathcal{A}$. Je-li $\tilde{\mu}$ σ-konečná, je μ jednoznačně určena.*

Důkaz: Pro $E \subset X$ položme

$$\mu^*(E) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i) :\ A_i \in \mathcal{A},\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\}.$$

(a) *μ^* je vnější míra*: Zřejmě $\mu^*(\emptyset) = 0$ a μ^* je monotónní. Ukážeme spočetnou subaditivitu (důkaz je stejný jako v případě vnější míry λ^{n*}). Nechť $E_i \in \mathcal{A}$, $\mu^*(E_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$. K danému $\varepsilon > 0$ existují $A_{ij} \in \mathcal{A}$ takové, že $E_i \subset \bigcup_j A_{ij}$ a $\sum_j \tilde{\mu}(A_{ij}) < \mu^*(E_i) + \varepsilon 2^{-i}$, $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcup_i E_i \subset \bigcup_i \bigcup_j A_{ij}$ a $\sum_i \sum_j \tilde{\mu}(A_{ij}) < \sum_i \mu^*(E_i) + \varepsilon$, z čehož již plyne spočetná subaditivita, neboť ε může být libovolně malé.

(b) *Pro každou $A \in \mathcal{A}$ platí $\mu^*(A) = \tilde{\mu}(A)$*: Nerovnost $\mu^*(A) \le \tilde{\mu}(A)$ je zřejmá. Pro důkaz opačné nerovnosti předpokládejme, že $A \subset \bigcup_i A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$. Indukcí definujme $B_1 := A_1 \cap A$, $B_2 := (A_2 \cap A) \setminus B_1$, a

$$B_i := (A_i \cap A) \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{i-1}), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě B_i jsou po dvou disjunktní a platí $A = \bigcup_i B_i$, z vlastností pramíry tedy dostaneme

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_i \tilde{\mu}(B_i) \le \sum_i \tilde{\mu}(A_i).$$

To (podle definice μ^*) znamená, že $\mu^*(A) \geq \tilde{\mu}(A)$.

(c) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$: Nechť $A \in \mathcal{A}$, $T \subset X$, $\mu^*(T) < \infty$. Stačí ukázat, že $\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$. K danému $\varepsilon > 0$ existuje pokrytí $T \subset \bigcup_i A_i$ množinami $A_i \in \mathcal{A}$ takové, že $\sum_i \tilde{\mu}(A_i) < \mu^*(T) + \varepsilon$. Protože $T \cap A \subset \bigcup_i (A_i \cap A)$, $T \setminus A \subset \bigcup_i (A_i \setminus A)$ a množiny $A_i \cap A$ i $A_i \setminus A$ patří do $\mathcal{A}$, platí

$$\mu^*(T \cap A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i \cap A), \quad \mu^*(T \setminus A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i \setminus A),$$

a sečtením dostaneme

$$\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i \cap A) + \sum_i \tilde{\mu}(A_i \setminus A) = \sum_i \tilde{\mu}(A_i) < \mu^*(T) + \varepsilon,$$

z čehož již plyne dokazovaná nerovnost.

Podle Caratheodoryho věty je $\mu := \mu^* | \mathcal{A}_{\mu^*}$ míra, která navíc podle (b) rozšiřuje pramíru $\tilde{\mu}$, a podle (c) je definovaná na $\sigma\mathcal{A}$.

Jednoznačnost snadno plyne z věty o jednoznačnosti míry. Algebra $\mathcal{A}$ je zřejmě uzavřená na konečné průniky a je-li $\tilde{\mu}$ σ-konečná, existují množiny $A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $\tilde{\mu}(A_n) < \infty$ a $A_n \nearrow X$, $n \to \infty$. $\square$

Připomeňme ještě následující kriterium pro spočetnou aditivitu z přednášky TMI1:

Tvrzení 4.2. *Buď $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ konečná, konečně aditivní funkce na algebře $\mathcal{A}$ splňující $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Pak $\tilde{\mu}$ je σ-aditivní právě tehdy, když*

$$A_i \in \mathcal{A},\ A_i \searrow \emptyset \implies \tilde{\mu}(A_i) \to 0. \tag{4}$$

(Vlastnosti (4) říkáme spojitost $\tilde{\mu}$ v prázdné množině.)

Přednáška 9.11.2021

V této přednášce ukážeme aplikaci Hahn-Kolmogorovovy věty pro existenci rozdělení posloupnosti náhodných veličin.

Buďte (E_i, ρ_i) úplné a separabilní metrické prostory, $i \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že všechny metriky ρ_i jsou shora omezeny jedničkou (toto není omezující předpoklad, protože s každou metrikou ρ je ekvivalentní metrika $\min\{1, \rho\}$). Uvažuje kartézský součin $E := \prod_{i=1}^{\infty} E_i$ s metrikou

$$\rho(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{2^i}, \quad x, y \in E.$$

Cvičení: Ukažte, že ρ je metrika a že prostor (E, ρ) je separabilní.

Označme dále $\mathcal{I}_f := \{\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}, I \text{ konečná}\}$, a pro $I \in \mathcal{I}_f$ nechť $E_I := \prod_{i \in I} E_i$ je (konečný) kartézský součin s metrikou $\rho_I(x, y) := \sum_{i \in I} 2^{-i} \rho_i(x_i, y_i)$, $x, y \in E_I$. Pro $I \in \mathcal{I}_f$ nechť $\pi_I : E \to E_I$ značí projekci, která z posloupnosti $x = (x_i : i \in \mathbb{N})$ zachová pouze souřadnice $i \in I$, a podobně pro $I, J \in \mathcal{I}_f$, $I \subset J$, označme $\pi_I^J : E_J \to E_I$ odpovídající projekci z E_J do E_I.

Lemma 4.3. *1. Pro $x_n, x \in E$ platí*

$$x_n \to x \iff x_n(i) \to x(i),\ i \in \mathbb{N}.$$

Podobně pro $I \in \mathcal{I}_f$ a $y_n, y \in E_I$ platí

$$y_n \to y \iff y_n(i) \to y(i),\ i \in I.$$

2. (E_I, ρ_I) jsou úplné a separabilní metrické prostory, $I \in \mathcal{I}$.

3. Projekce π_I a π_I^J jsou spojité, $I, J \in \mathcal{I}$, $I \subset J$.

4. Pro borelovské σ-algebry platí

$$\mathcal{B}(E_I) = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}(E_i), \quad I \in \mathcal{I}.$$

Důkaz. Vlastnosti 1 - 3 plynou snadno z definic. K důkazu bodu 4 využijeme, že

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}(E_i) = \sigma\left\{\prod_{i \in I} G_i : G_i \subset E_i \text{ otevřená}\right\}.$$

Protože každá množina tvaru $\prod_{i \in I} G_i$ s otevřenými G_i je otevřená v E_I platí inkluze $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}(E_i) \subset \mathcal{B}(E_I)$. Pro důkaz opačné inkluze uvažujme otevřenou množinu $U \subset E_I$. Z předpokladu separability plyne, že můžeme psát U ve tvaru

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \prod_{i \in I} G_{i,n}$$

s otevřenými množinami $G_{i,n} \subset E_i$, tedy $U \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}(E_i)$. Tím je dokázána i druhá inkluze. □

Věta 4.4 (Daniell-Kolmogorov). *Buďte E_i úplné separabilní metrické prostory a $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$. Nechť pro každou konečnou množinu indexů $I \in \mathcal{I}_f$ existuje borelovská pravděpodobnostní míra μ_I na $E_I = \prod_{i \in I} E_i$ tak, že kdykoliv $I, J \in \mathcal{I}_f$, $I \subset J$, pak*

$$\mu_I(B) = \mu_J((\pi_I^J)^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(E_I).$$

Pak existuje právě jedna borelovská pravděpodobnostní míra μ na E taková, že

$$\mu(\pi_I^{-1}(B)) = \mu_I(B), \quad B \in \mathcal{B}(E_I),\ I \in \mathcal{I}_f.$$

Pozn.: Větu lze interpretovat jeko větu o existenci rozdělení náhodné posloupnosti na základě konečněrozměrných rozdělení členů této posloupnosti.

Příklad: Jsou-li μ_i borelovské pravděpodobnosti na E_i, pak součinové pravděpodobnosti $\mu_I = \bigotimes_{i \in I} \mu_i$, $I \in \mathcal{I}_f$, splňují předpoklady věty. Výslednou míru μ lze pak interpretovat jako nekonečný součin měr $\mu = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mu_i$. V jazyce pravděpodobnostní interpretace jsou pak náhodné veličiny v posloupnosti nezávislé.

Důkaz. Položme

$$\mathcal{A} := \{\pi_I^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(E_I),\ I \in \mathcal{I}_f\}.$$

(Množiny z $\mathcal{A}$ interpretujeme jako válce s konečněrozměrnou základnou.) Ukážeme nejprve, že systém $\mathcal{A}$ je algebra. Zřejmě $\emptyset = \pi_I^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{A}$ a je-li $A = \pi_I^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, pak i $E \setminus A = \pi_I^{-1}(E_I \setminus B) \in \mathcal{A}$. Jsou-li $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, pak existuje $I \in \mathcal{I}_f$ a $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(E_I)$ takové, že $A_i = \pi_I^{-1}(B_i)$, $i = 1, 2$, a tedy i $A_1 \cup A_2 = \pi_I^{-1}(B_1 \cup B_2) \in \mathcal{A}$. Tedy $\mathcal{A}$ je algebra.

Definujme množinovou funkci $\tilde{\mu}$ na $\mathcal{A}$ předpisem

$$\tilde{\mu}(A) = \mu_I(B), \quad \text{pokud} \quad A = \pi_I^{-1}(B), \quad B \in \mathcal{B}_I.$$

Ukážeme nejprve konzistenci této definice. Nechť množina $A \in \mathcal{A}$ má dvě vyjádření $A = \pi_I^{-1}(B) = \pi_J^{-1}(B')$ pro nějaké $B \in \mathcal{B}(E_I)$ a $B' \in \mathcal{B}(E_J)$. Položme $K := I \cup J$. Protože $\pi_I = \pi_I^K \circ \pi_K$ a $\pi_J = \pi_J^K \circ \pi_K$, je

$$A = \pi_K^{-1} \circ (\pi_I^K)^{-1}(B) = \pi_K^{-1} \circ (\pi_J^K)^{-1}(B'),$$

z čehož plyne, že

$$(\pi_I^K)^{-1}(B) = (\pi_J^K)^{-1}(B').$$

Podle předpokladu věty ovšem platí $\mu_K((\pi_I^K)^{-1}(B)) = \mu_I(B)$ a $\mu_K((\pi_J^K)^{-1}(B')) = \mu_J(B')$, a tedy $\mu_I(B) = \mu_J(B')$, což dává konzistenci definice $\tilde{\mu}$.

Zřejmě platí $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Ukážeme, že $\tilde{\mu}$ je konečně aditivní množinová funkce. Mějme $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Pak existuje $I \in \mathcal{I}_f$ a disjunktní množiny $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(E_I)$ takové, že $A_i = \pi_I^{-1}(B_i)$, $i = 1, 2$. Pak ovšem

$$\tilde{\mu}(A_1 \cup A_2) = \mu_I(B_1 \cup B_2) = \mu_I(B_1) + \mu_I(B_2) = \tilde{\mu}(A_1) + \tilde{\mu}(A_2).$$

Tedy $\tilde{\mu}$ je konečně aditivní.

Potřebujeme ukázat, že $\tilde{\mu}$ je pramíra. K tomu stačí ukázat, že splňuje podmínku spojitosti v prázdné množině, kterou lze ekvivalentně přeformulovat takto: Je-li dáno $\varepsilon > 0$, pak pro kažou monotónní posloupnost $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ množin z $\mathcal{A}$ takových, že $\tilde{\mu}(A_n) \geq \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Mějme tedy $\varepsilon > 0$ a množiny A_n s uvedenými vlastnostmi, platí tedy $A_n = \pi_{I_n}^{-1}(B_n)$ pro nějaké $I_n \in \mathcal{I}_f$ a $B_n \in \mathcal{B}(E_{I_n})$. Prostory E_{I_n} jsou úplné a separabilní, pravděpodobnostní míry μ_{I_n} jsou tedy těsné a existují kompaktní množiny $K_n \subset B_n$ takové, že

$$\mu_{I_n}(B_n \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Položme $C_n := \pi_{I_n}^{-1}(K_n)$ a $D_n := C_1 \cap \dots \cap C_n$, $n \in \mathbb{N}$. Množiny C_n i D_n jsou válce s konečněrozměrnými kompaktními základnami, leží tedy v $\mathcal{A}$ a platí $D_n \subset C_n \subset A_n$. Ukážeme nejprve, že $D_n \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$. Platí

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(A_n \setminus D_n) &= \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_n \setminus C_i)\right) \leq \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \setminus C_i)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mu}(A_i \setminus C_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{I_i}(B_i \setminus K_i) < \varepsilon,\end{aligned}$$

a tedy $\tilde{\mu}(D_n) = \tilde{\mu}(A_n) - \tilde{\mu}(A_n \setminus D_n) > 0$, z čehož plyne, že $D_n \neq \emptyset$.

Nyní ukážeme, že i $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$ (z čehož bude plynout, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$, a tedy že $\tilde{\mu}$ je pramíra). Uvědomme si, že D_n je nerostoucí posloupnost neprázdných válců s konečněrozměrnými kompaktními základnami, např. $D_n = \pi_{J_n}^{-1}(L_n)$, $J_n \in \mathcal{I}_f$, $L_n \subset E_{J_n}$ kompaktní, $n \in \mathbb{N}$. Můžeme klást $J_n = I_1 \cup \dots \cup I_n$, a lze tedy předpokládat monotonii $J_1 \subset J_2 \subset \dots$. Položme $J := \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. (Množina J samozřejmě může být nekonečná.) Mějme posloupnost prvků $x_n \in D_n$ a položme $y_n := \pi_J(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Pišme y_n ve tvaru $y_n = (y_n(j) : j \in J)$. Uvažujme nyní pro pevné $j \in J$ posloupnost $(y_n(j) : n \in \mathbb{N})$ prvků z E_j. Existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ je $j \in J_n \supset J_{n_0}$, a tedy $y_n(j) \in \pi_{\{j\}}^{J_{n_0}}(L_{n_0})$. Projekce $\pi_{\{j\}}^{J_{n_0}}(L_{n_0})$ kompaktní množiny L_{n_0} je kompaktní podmnožina E_j, a tedy existuje vybraná podposloupnost konvergující k nějakému $y(j) \in E_j$. Metodou diagonálního výběru pak sestrojíme vybranou podposloupnost $(y_{\sigma(n)})$ takovou, že $y_{\sigma(n)}(j) \to y(j)$, $n \to \infty$, pro každé $j \in J$. Libovolný prvek $x \in \pi_J^{-1}(y)$ pak musí ležet v uzavřené množině $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$, a tedy $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$.

Podle Hahn-Kolmogorovovy věty lze tedy pramíru $\tilde{\mu}$ jednoznačně rozšířit na (pravděpodobnostní) míru μ na $\sigma\mathcal{A}$. Zbývá ukázat, že $\sigma\mathcal{A} = \mathcal{B}(E)$. Protože projekce π_I jsou spojité, je vzor $\pi_I^{-1}(G)$ každé otevřené množiny $G \subset E_I$ otevřená množina v E, tedy borelovská množina. Platí tedy inkluze $\sigma\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(E)$. Pro opačnou inkluzi si uvědomme, že borelovská σ-algebra separabilního prostoru E je generována uzavřenými okolími $\overline{U}_\varepsilon(x)$ bodů $x \in E$, $\varepsilon > 0$. Označme $I_n := \{1, \dots, n\} \in \mathcal{I}_f$, $n \in \mathbb{N}$. Z definice metriky v E a E_{I_n} snadno dostaneme vztah

$$\overline{U}_\varepsilon(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi_{I_n}^{-1}\left(\overline{U}_\varepsilon(\pi_{I_n}(x))\right),$$

a tedy $\overline{U}_\varepsilon(x) \in \sigma\mathcal{A}$. Platí tedy i $\mathcal{B}(E) \subset \sigma\mathcal{A}$ a důkaz je ukončen. $\square$

Cvičení: Rozmyslete si, jak se důkaz věty zjednoduší v případě kompaktních prostorů E_i, $i \in \mathbb{N}$.

Přednáška 16.11.2021

5 Charakterizace Riemannovsky integrovatelných funkcí

Přípomeňme si z přednášky TMI1: Je-li funkce $f \in \mathcal{R}[0,1]$ (f je Riemannovsky integrovatelná), pak $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$ a (R) $\int_a^b f = \int_a^b f\,d\lambda^1$.

Věta 5.1. *Buď $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená. Pak*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff f \text{ je spojitá } \lambda^1\text{-s.v. na } [a,b].$$

Příklady:

1. Dirichletova funkce $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ není spojitá v žádném bodě, a také není na žádném intervalu Riemannovsky integrovatelná.

2. Charakteristická funkce Cantorova diskontinua $f = \chi_C$ je spojitá všude na doplňku Cantorova diskontinua C, a platí $\lambda^1(C) = 0$, tedy f je Riemannovsky integrovatelná na $[0,1]$.

Důkaz: Buď

$$\mathcal{D}_n := \{a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b\} \quad n \in \mathbb{N},$$

posloupnost zjemňujících se dělení intervalu $[a,b]$, a předpokládejme, že normy dělení konvergují k nule:

$$\|\mathcal{D}_n\| = \max_{1 \le i \le k_n} |x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Zaveďme funkce s_n, S_n předpisem

$$s_n(x) = \inf_{[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]} f, \quad S_n(x) = \sup_{[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]} f, \quad x \in (x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}],\ i = 1, \ldots, k_n,$$

a $s_n(x) = S_n(x) = 0$ pro ostatní hodnoty $x \in \mathbb{R}$. Funkce s_n i S_n jsou jednoduché měřitelné a zřejmě platí

$$\mathfrak{s}(f, \mathcal{D}_n) = \int_a^b s_n\,d\lambda^1, \quad \mathscr{S}(f, \mathcal{D}_n) = \int_a^b S_n\,d\lambda^1,$$

a dolní a horní součty konvergují k dolnímu a hornímu Riemannovu integrálu:

$$\int_a^b s_n\,d\lambda^1 = \mathfrak{s}(f, \mathcal{D}_n) \nearrow \underline{\int_a^b} f,$$
$$\int_a^b S_n\,d\lambda^1 = \mathscr{S}(f, \mathcal{D}_n) \searrow \overline{\int_a^b} f.$$

Funkce f je dle předpokladu omezená, tedy $|f| \leq M$ pro nějaké $M \in \mathbb{R}$. Platí

$$-M \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f \leq \cdots \leq S_2 \leq S_1 \leq M.$$

Označme $f_1 := \lim_{n\to\infty} s_n$, $f_2 := \lim_{n\to\infty} S_n$ (monotónní omezená posloupnost vždy konverguje). Pak platí

$$-M \leq s_n \nearrow f_1 \leq f \leq f_2 \swarrow S_n \leq M.$$

a podle zobecněné Leviho věty tedy

$$\int_a^b s_n \, d\lambda^1 \to \int_a^b f_1 \, d\lambda^1, \quad \int_a^b S_n \, d\lambda^1 \to \int_a^b f_2 \, d\lambda^1.$$

Důsledkem jsou rovnosti

$$\int_a^b f_1 \, d\lambda^1 = \underline{\int_a^b} f, \quad \int_a^b f_2 \, d\lambda^1 = \overline{\int_a^b} f.$$

$\Longrightarrow$: Nechť $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Pak platí $f_1 = f_2$ s.v. Označme

$$N := \{x \in [a,b] : f_1(x) \neq f_2(x)\} \cup \{x_i^{(n)} : 0 \leq i \leq k_n, \, n = 1, 2, \dots\}.$$

Podle předpokladu platí $\lambda^1(N) = 0$. Ukážeme, že f je spojitá v každém bodě $x \in (a,b) \setminus N$. Nechť jsou dány $x \in (a,b) \setminus N$ a $\varepsilon > 0$. Protože $f_1(x) = f_2(x)$, musí existovat $n \in \mathbb{N}$ takové, že $S_n(x) - s_n(x) < \varepsilon$. Označme I_n ten otevřený interval z dělení $\mathcal{D}_n$, pro nějž je $x \in I_n$. Pak platí $s_n(x) < f(y) < S_n(x)$ pro všechna $y \in I_n$, a tedy $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ kdykoliv $y \in I_n$. Tím je dokázáno, že funkce f je spojitá v x.

$\Longleftarrow$: Označme D množinu všech bodů z (a,b), v nichž f není spojitá. Podle předpokladu $\lambda^1(D) = 0$. Ukážeme, že $S_n(x) - s_n(x) \to 0$, $n \to \infty$, kdykoliv $x \in (a,b) \setminus D$. Pak bude podle Leviho věty platit $\int_a^b (S_n - s_n) \, d\lambda^1 \to 0$, tedy $\mathscr{S}(f, \mathcal{D}_n) - \mathfrak{s}(f, \mathcal{D}_n) \to 0$, což bude znamenat, že $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Nechť jsou tedy dány $x \in (a,b) \setminus D$ a $\varepsilon > 0$. Z definice spojitosti existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ kdykoliv $|y - x| < \delta$. Zvolne n_0 tak velké, aby $\|\mathcal{D}_n\| < \delta$ kdykoliv $n \geq n_0$. Pak platí

$$S_n(x) - s_n(x) \leq 2 \sup\{|f(y) - f(x)| : |y - x| < \delta\} \leq 2\varepsilon, \quad n \geq n_0,$$

a důkaz je hotov. $\square$

Přednáška 23.11.2021

6 Pokrývací věty

Úmluva: V této kapitole budeme pracovat s koulemi v $\mathbb{R}^n$. Koulí budeme rozumět uzavřenou nedegenerovanou kouli, $B = B(x, r)$, $r > 0$. Budeme používat značení $\operatorname{rad} B = r$ (radius koule B) a pro $t > 0$ budeme značit $tB := B(x, tr)$ (tedy tB je koule se stejným středem jako B, ale s t-násobným poloměrem).

Lemma 6.1 ("5r"-Covering Lemma)**.** *Nechť $\mathcal{F}$ je systém uzavřených koulí v $\mathbb{R}^n$ se $\sup_{B\in\mathcal{F}} \operatorname{rad} B < \infty$. Pak existuje disjunktní podsystém (tj. podsystém po dvou disjunktních koulí) $\mathcal{F}'$ takový, že*

$$(\forall B \in \mathcal{F})\,(\exists B' \in \mathcal{F}') : \; B \cap B' \neq \emptyset \,\&\, B \subset 5B'. \tag{5}$$

Důkaz. Označme $R := \sup_{B\in\mathcal{F}} \operatorname{rad} B$ a

$$\mathcal{F}_k := \left\{ B \in \mathcal{F} : \operatorname{rad} B \in \left(\frac{R}{2^{k+1}}, \frac{R}{2^k} \right] \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Dále definujme indukcí posloupnost systémů koulí $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{F}_k$ takto:

- za $\mathcal{B}_0$ vezměme libovolný maximální disjunktní podsystém $\mathcal{F}_0$.
- máme-li definovány $\mathcal{B}_0, \ldots, \mathcal{B}_{k-1}$, vezměme za $\mathcal{B}_k$ libovolný maximální disjunktní podsystém systému

$$\{B \in \mathcal{F}_k : \; B \cap B' = \emptyset \text{ pro každou } B' \in \mathcal{B}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{k-1}\}.$$

Položme $\mathcal{F}' := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k$. Systém $\mathcal{F}'$ je zřejmě disjunktním podsystémem $\mathcal{F}$. Ověříme vlastnost (5). Nechť je dána koule $B \in \mathcal{F}$. Pak $B \in \mathcal{F}_k$ pro nějaké $k \geq 0$ a nutně existuje koule $B' \in \mathcal{B}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$, pro niž $B' \cap B \neq \emptyset$ (jinak bychom dostali spor s maximalitou systému $\mathcal{B}_k$). Platí

$$\frac{R}{2^{k+1}} < \operatorname{rad} B \leq \frac{R}{2^k} \text{ a } \operatorname{rad} B' > \frac{R}{2^{k+1}},$$

tedy $\operatorname{rad} B < 2 \operatorname{rad} B'$. Ukážeme, že $B \subset 5B'$. Nechť $B = B(x, r)$ a $B' = B(x', r')$, a nechť $y \in B$, tedy $\|y - x\| \leq r$. Protože $B' \cap B \neq \emptyset$, je $\|x - x'\| \leq r + r'$. Máme tedy

$$\|y - x'\| \leq \|y - x\| + \|x - x'\| \leq r + r + r' \leq 5r',$$

tedy $y \in 5B'$. Tím je ověřena inkluze $B \subset 5B'$ a důkaz je hotov. $\square$

Definice 6.1. Řekneme, že systém uzavřených koulí $\mathcal{F}$ je *Vitaliovým pokrytím* množiny $A \subset \mathbb{R}^n$, jestliže

$$(\forall a \in A)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists B \in \mathcal{F}) : \; \operatorname{rad} B < \varepsilon \,\&\, a \in B. \tag{6}$$

Pozn.: Podmínka (6) říká, že každý bod množiny A je pokryt "libovolně malou" koulí ze systému $\mathcal{F}$.

Věta 6.2 (Vitaly Covering Theorem)**.** *Nechť systém uzavřených koulí $\mathcal{F}$ je Vitaliovým pokrytím množiny $A \subset \mathbb{R}^n$. Pak existuje $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ disjunktní takový, že $\lambda^n(A \setminus \bigcup \mathcal{F}') = 0$.*

Pozn.: Věta říká, že skoro všechny body množiny A lze pokrýt disjunktími koulemi z $\mathcal{F}$. U množiny A nepředpokládáme měřitelnost.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpoládat, že $\sup_{B\in\mathcal{F}} \operatorname{rad} B \leq 1$ (větší koule můžeme ze systému odstranit a systém nadále bude Vitaliovým pokrytím). Podle předchozího lemmatu existuje disjunktní podsystém $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ splňující podmínku (5). Ukážeme, že $\lambda^n(A \setminus \bigcup \mathcal{F}') = 0$. K tomu stačí ukázat, že $\lambda^n(Z_r) = 0$ pro každé $r > 0$, kde $Z_r := (A \setminus \bigcup \mathcal{F}') \cap U_r(0)$, $r > 0$ ($U_r(0)$ značí otevřené r-okolí počátku).

Nechť je dáno $r > 0$. Označme

$$\mathcal{F}'' := \{B' \in \mathcal{F}' : B' \cap U_r(0) \neq \emptyset\},$$
$$\mathcal{F}''_k := \left\{B' \in \mathcal{F}'' : \operatorname{rad} B' \in \left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]\right\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Z disjunktnosti systému $\mathcal{F}''$ plyne

$$\sum_{B'\in\mathcal{F}''} \lambda^n(B') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{B'\in\mathcal{F}''_k} \lambda^n(B') \leq \lambda^n(B(0, r+2)) < \infty,$$

z čehož mimo jíné plyne, že každý systém $\mathcal{F}''_k$ je konečný (koule z $\mathcal{F}''_k$ mají zdola omezené poloměry). Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Z konečnosti výše uvedené symu plyne existence $k_0 \in \mathbb{N}$ takového, že

$$\sum_{k>k_0} \sum_{B'\in\mathcal{F}''_k} \lambda^n(B') < \varepsilon.$$

Zvolme pevně bod $z \in Z_r$. Zřejmě $z \notin \bigcup_{k=0}^{k_0} \bigcup \mathcal{F}''_k := K$ a množina K je konečným sjednocením koulí, tedy kompaktní. Z vlastnosti (6) Vitaliova pokrytí plyne existence koule $B \in \mathcal{F}$ takové, že $B \cap K = \emptyset$, $B \subset U_r(0)$ a $z \in B$. Dále z vlastnosti (5) systému $\mathcal{F}'$ plyne existence koule $B' \in \mathcal{F}'$ takové, že $B' \cap B \neq \emptyset$ a $B \subset 5B'$. Zřejmě $B' \in \mathcal{F}''$ a $B' \notin \bigcup_{k=0}^{k_0} \mathcal{F}''_k$, tedy $B' \in \bigcup_{k>k_0} \mathcal{F}''_k$. Je tedy $z \in \bigcup_{k>k_0} \bigcup_{B'\in\mathcal{F}''_k} (5B')$.

Ukázali jsme, že $Z_r \subset \bigcup_{k>k_0} \bigcup_{B'\in\mathcal{F}''_k} (5B')$, a tedy

$$\lambda^{n*}(Z_r) \leq \sum_{k>k_0} \sum_{B'\in\mathcal{F}''_k} \lambda^n(5B') < 5^n\varepsilon$$

(zde pracujeme s vnější mírou λ^{n*}, protože množina Z_r nemusí být měřitelná). Limitním přechodem $\varepsilon \to 0$ dostaneme $\lambda^n(Z_r) = 0$ a důkaz je ukončen. □

Definice 6.2. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a $a \in \mathbb{R}^n$. Pak *horní* a *dolní Lebesgueovu hustotu* množiny A v bodě a definujeme postupně jako

$$\Theta^{*n}(A,a) := \limsup_{\varepsilon \to 0_+} \frac{\lambda^{n*}(A \cap B(a,\varepsilon))}{\lambda^n(B(a,\varepsilon))},$$
$$\Theta^n_*(A,a) := \liminf_{\varepsilon \to 0_+} \frac{\lambda^{n*}(A \cap B(a,\varepsilon))}{\lambda^n(B(a,\varepsilon))}.$$

Jsou-li si horní a dolní Lebesgueova hustota rovny, nazveme ji *Lebesgueovou hustotou* a značíme $\Theta^n(A,a)$.

Příklady: Je-li $a \in \operatorname{int} A$, pak $\Theta^n(A,a) = 1$, a je-li $a \in \operatorname{int} A^C$, pak $\Theta^n(A,a) = 0$. Zajímavá je tedy jen situace, kdy $a \in \partial A$.

Cvičení: Určete $\Theta^3(A,a)$ ve všech bodech pro množiny (a) $A = [0,1]^3$, (b) $A = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le 1\}$.

Pozn.: Platí implikace

$$\Theta^n(A,a) = 0 \implies \Theta^n(A^C,a) = 1.$$

Opačná implikace platí v případě měřitelné množiny A. Důkaz plyne ze subaditivity vnější míry:

$$\lambda^{n*}(A \cap B(a,\varepsilon)) + \lambda^{n*}(A^C \cap B(a,\varepsilon)) \ge \lambda^n(B(a,\varepsilon))$$

(rozmyslete si podrobně).

Přednáška 30.11.2021

Věta 6.3 (Lebesgue Density Theorem)**.** *Pro $A \subset \mathbb{R}^n$ lebesgueovsky měřitelnou platí $\Theta^n(A, \cdot) = \chi_A(\cdot)$ λ^n-skoro všude. (Tedy Lebesgueova hustota je rovna jedné ve skoro všech bodech množiny A a je rovna nule ve skoro všech bodech komplementu A^C.)*

Důkaz. Stačí ukázat, že $\Theta^n(A, a) = 1$ pro skoro všechny body $a \in A$. (Toto tvrzení pak použijeme i pro komplement A^C a využijeme implikace $\Theta^n(A^C, a) = 1 \implies \Theta^n(A, a) = 0$, viz poznámka před větou.) Je také zřejmé, že stačí uvažovat omezenou množinu A.

Pro číslo $0 < \delta < 1$ označme

$$A_\delta := \left\{ a \in A : \liminf_{r \to 0_+} \frac{\lambda^n(A \cap B(a, r))}{\lambda^n(B(a, r))} < \delta \right\}.$$

Ukážeme, že $\lambda^n(A_\delta) = 0$ pro každé $0 < \delta < 1$. Z toho pak bude plynout, že $\Theta^n_*(A, a) = 1$, a tedy $\Theta^n(A, a) = 1$, pro skoro všechny $a \in A$.

Nechť pro spor $\lambda^{n*}(A_\delta) > 0$ pro nějaké $\delta < 1$. Z regularity Lebesgueovy míry (nebo z definice vnější míry λ^{n*}) víme, že existuje otevřená množina $G \supset A_\delta$ taková, že $\lambda^n(G) < \delta^{-1}\lambda^{n*}(A_\delta)$. Položme

$$\mathcal{F} := \{B(a, r) : a \in A_\delta, B(a, r) \subset G, \lambda^n(A \cap B(a, r)) < \delta\lambda^n(B(a, r))\}.$$

Z definice množiny A_δ je vidět, že $\mathcal{F}$ je Vitaliovým pokrytím množiny A_δ. Podle Vitaliovy věty tedy existují po dvou disjunktní koule $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$ takové, že $\lambda^n(A_\delta \setminus \bigcup_i B_i) = 0$. Pak ale

$$\begin{aligned}\lambda^{n*}(A_\delta) = \lambda^{n*}(A_\delta \cap \bigcup_i B_i) &\le \sum_i \lambda^{n*}(A_\delta \cap B_i) \le \sum_i \lambda^n(A \cap B_i) \\ &< \delta \sum_i \lambda^n(B_i) \le \delta\lambda^n(G) < \lambda^{n*}(A_\delta),\end{aligned}$$

což je spor. □

7 Důkaz věty o substituci

Připomeňme si nejprve znění věty o substituci (TMI1). Budeme psát zkráceně dx místo $d\lambda^n(x)$.

Věta 7.1. *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $g : U \to \mathbb{R}^n$ C^1-difeomorfismus (tedy prosté zobrazení takové, že g i g^{-1} jsou třídy C^1) a $f : g(U) \to \mathbb{R}$ lebesgueovsky měřitelná. Pak*

$$\int_U f \circ g(x)\, |Jg(x)|\, dx = \int_{g(U)} f(y)\, dy,$$

má-li jeden z integrálů smysl. Zde

$$Jg(x) := \det \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1}^n.$$

Připomeňme si, že věta byla v přednášce TMI1 dokázána pro případ afinního zobrazení g.

Definice 7.1. Zobrazení $f : X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y je *L-lipschitzovské*, jestliže pro všechna $x, y \in X$ platí

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y).$$

Věta 7.2. *Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ lebesgueovsky měřitelná a $f : A \to \mathbb{R}^n$ L-lipschitzovské, pak*

$$\lambda^{n*}(f(A)) \leq L^n \lambda^n(A).$$

Pozn.: Lipschizovský obraz měřitelné množiny je měřitelný, což ale nedokazujeme, proto tvrzení pracuje s vnější mírou. (Pouze spojitý obraz měřitelné množiny ovšem nemusí být měřitelný.)

Důkaz: (1) Je-li $A \subset B$, kde $B = B(x, r)$ je koule, pak $f(A) \subset f(B) \subset B(f(x), Lr)$, a tedy $\lambda^n(f(A)) \leq L^n \lambda^n(B)$.

(2) Ukážeme, že pro nulovou množinu $N \subset \mathbb{R}^n$ je $\lambda^n(f(N)) = 0$. Protože N je nulová, ke každému $\varepsilon > 0$ existují otevřené kvádry I_i takové, že $N \subset \bigcup_i I_i$ a $\sum_i \lambda^n(I_i) < \varepsilon$. Lze přitom zařídit, aby pro všechna i

$$\frac{r(I_i)}{R(I_i)} \geq \eta > 0,$$

kde $r(I)$ ($R(I)$) je poloměr vepsané (opsané) koule kvádru I a $\eta > 0$ je konstanta závisející pouze na dimenzi n (lze toho dosáhnout půlením “příliš dlouhých” hran). Je-li B_i koule opsaná kvádru I_i, platí tedy $\lambda^n(B_i) \leq \eta^{-n} \lambda^n(I_i)$, a tedy

$$\begin{aligned}
\lambda^{n*}(f(N)) &\leq \lambda^{n*}\left(\bigcup_i f(B_i)\right) \leq \sum_i \lambda^{n*}(f(B_i)) \\
&\leq L^n \sum_i \lambda^n(B_i) \leq \left(\frac{L}{\eta}\right)^n \sum_i \lambda^n(I_i) < \left(\frac{L}{\eta}\right)^n \varepsilon.
\end{aligned}$$

Protože ε může být libovolně malé, platí $\lambda^{n*}(f(N)) = 0$.

(3) Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná a $\varepsilon > 0$, existuje otevřená množina $G \supset A$ taková, že $\lambda^n(G) \leq \lambda^n(A) + \varepsilon$ (vlastnost regularity Lebesgueovy míry). Podle Vitaliho věty existují disjunktní koule $B_i \subset G$ a nulová množina N tak, že $G = \bigcup_i B_i \cup N$, a tedy, s využitím (1) a (2) dostaneme

$$\begin{aligned}
\lambda^{n*}(f(A)) &\leq \lambda^{n*}(f(G)) \leq \lambda^{n*}\left(\bigcup_i f(B_i) \cup f(N)\right) \\
&\leq \sum_i L^n \lambda^n(B_i) = L^n \lambda^n(G) \leq L^n \lambda^n(A) + L^n \varepsilon,
\end{aligned}$$

a limitní přechod $\varepsilon \to 0$ dává žádaný odhad. $\square$

Definice 7.2. *Normu* regulárního lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definujeme jako
$$\|L\| := \sup\{\|Lu\| : \|u\| \leq 1\}.$$

Pozn.: Platí:
$$\delta(L)\,\|u\| \leq \|Lu\| \leq \|L\|\,\|u\|, \quad u \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$
kde $\delta(L) := \inf\{\|Lu\| : \|u\| = 1\} > 0$.

Tvrzení 7.3. *Jsou-li* L, M *dvě regulární lineární zobrazení a* $\gamma > 0$ *takové, že* $\|Lu\| \leq \gamma\|Mu\|$, $u \in \mathbb{R}^n$, *pak*
$$|\det L| \leq \gamma^n |\det M|.$$

Důkaz: Nejprve tvrzení dokážeme pro případ $M = \mathrm{Id}$. Je-li $\|Lu\| \leq \gamma\|u\|$, $u \in \mathbb{R}^n$, a $B \subset \mathbb{R}^n$ koule se středem v počátku, pak $L(B) \subset \gamma B$, což implikuje
$$|\det L|\lambda^n(B) = \lambda^n(L(B)) \leq \lambda^n(\gamma B) = \gamma^n \lambda^n(B),$$
a tedy $|\det L| \leq \gamma^n$.

Pro obecná L, M pak z předpokladu $\|Lu\| \leq \gamma\|Mu\|$, $u \in \mathbb{R}^n$, plyne $\|LM^{-1}v\| \leq \gamma\|v\|$, $v \in \mathbb{R}^n$ (klademe $v = Mu$), a tedy $|\det(LM^{-1})| \leq \gamma^n$, z čehož plyne $|\det L| \leq \gamma^n |\det M|$. □

Pozn.: V aplikacích často není splněn předpoklad prostoty substitučního zobrazení g. Snadno lze odvodit následující zobecnění:

Věta 7.4. *Buď* $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \subset \mathbb{R}^n$ *rozklad na otevřené množiny a* $g : U \to \mathbb{R}^n$ *taková, že restrikce* $g|U_i$ *je* C^1*-difeomorfismus pro každé* i*. Pak pro* $f : g(U) \to \mathbb{R}$ *lebesgueovsky měřitelnou platí*
$$\int_U f \circ g(x)\,|Jg(x)|\,dx = \int_{g(U)} \operatorname{card}(f^{-1}(y))\,dy,$$
má-li jeden z integrálů smysl.

Pozn.: Výše uvedená věta platí i v daleko obecnějším případě, kdy zobrazení g je pouze lipschitzovské (lipschitzovské zobrazení má diferenciál skoro ve všech bodech, proto je integrál z Jakobiánu dobře definován).

Přednáška 7.12.2021

Dokážeme větu o substituci v této formě:

Věta 7.5 (Věta o substituci)**.** *Buďte $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $g : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus (C^1) a $A \subset U$ lebesgueovsky měřitelná. Pak*

$$\int_A |Jg(x)|\,dx = \lambda^n(g(A)).$$

Toto je speciální případ Věty 7.1 s funkcí $f = \chi_{g(A)}$. Obecný případ se dokáže standardním postupem (postupně pro jednoduché měřitelné funkce, nezáporné měřitelné a nakonec integrovatelné funkce).

Důkaz. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Ke každému $x \in U$ existuje $r_x > 0$ takové, že pro všechna $y \in B(x, r_x)$ platí

$$\|Dg(y) - Dg(x)\| < \varepsilon\delta(Dg(x)), \tag{8}$$

a

$$\|g(y) - g(x) - Dg(x)(y - x)\| < \varepsilon\delta(Dg(x))\|(y - x)\| \tag{9}$$

(v prvním případě využíváme spojitosti diferenciálu Dg, v druhém případě definice diferenciálu; včetně faktu $\delta(Dg(x)) > 0$). Využitím (7) pak dostaneme

$$\|Dg(y)u - Dg(x)u\| < \varepsilon\|Dg(x)u\|, \quad u \in \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

$$\|g(y) - g(x) - Dg(x)(y - x)\| < \varepsilon\|Dg(x)(y - x)\|. \tag{11}$$

Existuje spočetná množina $S = \{x_1, x_2, \dots\} \subset U$ taková, že $U = \bigcup_i B(x_i, r_{x_i})$ (stačí si uvědomit, že existují kompaktní množiny $K_j \nearrow U$ a každou K_j lze pokrýt konečně mnoha koulemi). Označme $B_i := B(x_i, r_{x_i})$ a $L_i := Dg(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Z vlastnosti (10) plyne

$$(1 - \varepsilon)\|L_i u\| \leq \|Dg(x)u\| \leq (1 + \varepsilon)\|L_i u\|, \quad x \in B_i,\ u \in \mathbb{R}^n. \tag{12}$$

Je snadno vidět, že existuje měřitelný rozklad $A = \bigcup_{i,j} E_{ij}$ takový, že pro všechna $i, j \in \mathbb{N}$:

- $E_{ij} \subset B_i$,
- $\operatorname{diam} E_{ij} < j^{-1}$ a
- $r_x > j^{-1}$, $x \in E_{ij}$.

Pro libovolné dva body $x, y \in E_{ij}$ pak platí

$$\|g(y) - g(x)\| \leq \|Dg(x)(y - x)\| + \varepsilon\|Dg(x)(y - x)\| \leq (1 + \varepsilon)^2\|L_i(y - x)\|$$

a

$$\|g(y) - g(x)\| \geq \|Dg(x)(y - x)\| - \varepsilon\|Dg(x)(y - x)\| \geq (1 - \varepsilon)^2\|L_i(y - x)\|.$$

To znamená, že zobrazení $g \circ L_i^{-1} : L_i(E_{ij}) \to g(E_{ij})$ je $(1+\varepsilon)^2$-lipschitzovské, a jeho inverze $L_i \circ g^{-1}$ je $(1-\varepsilon)^{-2}$-lipschitzovská.

Označme $\eta := \max\{(1+\varepsilon)^2, (1-\varepsilon)^{-2}\}$. S využitím prostoty g, Věty 7.2, faktu $\lambda^n(g(E_{ij})) = |\det L_{ij}|\lambda^n(E_{ij})$ (z přednášky TMI1), (12) a Tvrzení 7.3 pak dostaneme

$$\begin{aligned}
\lambda^n(g(A)) &= \lambda^n\left(g\left(\bigcup_{i,j} E_{ij}\right)\right) = \sum_{i,j} \lambda^n(g(E_{ij})) \\
&\le \eta^n \sum_{i,j} \lambda^n(L_i(E_{ij})) = \eta^n \sum_{i,j} |\det L_i| \lambda^n(E_{ij}) \\
&= \eta^n \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} |\det L_i|\, dx \le \eta^n \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} \eta^n |Jg(x)|\, dx \\
&= \eta^{2n} \int_A |Jg(x)|\, dx,
\end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned}
\lambda^n(g(A)) &\ge \eta^{-n} \sum_{i,j} \lambda^n(L_i(E_{ij})) \ge \eta^{-n} \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} \eta^{-n} |Jg(x)|\, dx \\
&= \eta^{-2n} \int_A |Jg(x)|\, dx.
\end{aligned}$$

Limitním přechodem $\varepsilon \to 0$ (tedy $\eta \to 1$) dostaneme dokazovanou rovnost. □

8 Konvergence posloupnosti funkcí

Nechť je dán prostor s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a měřitelné funkce f_n, f (reálné nebo komplexní) na $(X, \mathcal{A})$. Připomeňme různé definice konvergence posloupnosti (f_n) k f:

- $f_n \xrightarrow{s.j.} f \iff \mu\{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\} = 0$,
- $f_n \xrightarrow{L^p} f \iff \|f_n - f\|_p \to 0$, kde $\|g\|_p = (\int_X |g|^p \, d\mu)^{1/p}$ pro $1 \le p < \infty$,
- $f_n \xrightarrow{\mu} f \iff \forall \varepsilon > 0 : \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\} \to 0$.

Připomeňme si též souvislosti mezi těmito typy konvergencí, které známe z TMI1:

1. $f_n, f \in L^p(\mu)$, $f_n \xrightarrow{L^p} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f$ (pro $p \in [1, \infty)$ plyne z Čebyševovy nerovnosti: $\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\} \le \varepsilon^{-p} \|f_n - f\|_p^p$);
2. $\mu(X) < \infty$, $f_n \xrightarrow{s.v.} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f$ (plyne z Jegorovovy věty: $f_n \xrightarrow{s.v.} f$, $\varepsilon > 0 \implies \exists E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) < \varepsilon$, $f_n \rightrightarrows f$ na $X \setminus E$);

3. $\mu(X) < \infty$, $1 \le p < q \le \infty \implies L_q(\mu) \subset L^p(\mu)$ and $(f_n \xrightarrow{L^q} f \implies f_n \xrightarrow{L^p} f)$.

Na prostoru $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda|_{[0,1]})$ lze najít příklady demonstrující neplatnost ostatních implikací mezi konvergencemi: $f_n \xrightarrow{\mu} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{s.v.} f$, $f_n \xrightarrow{\mu} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{L^1} f$, $f_n \xrightarrow{L^1} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{s.v.} f$ a $f_n \xrightarrow{s.v.} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{L^1} f$.

Připomeňme si dále Lebesgueovu větu o konvergentní majorantě. Tato věta říká, že pokud $f_n \xRightarrow{s.v.} f$ a $|f_n| \le g$ s.v. pro nějakou $g \in L^1(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, pak $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$. Ukažme si, že v tomto případě dokonce platí $f_n \xrightarrow{L^1} f$. V důkazu uvedené věty jsme pracovali s posloupnostmi funkcí

$$g_n := \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, \quad h_n := \sup\{f_n, f_{n+1}, \dots\},$$

pro něž platí $-g \le g_n \le f_n \le h_n \le g$ a $g_n \nearrow f \swarrow h_n$, tedy

$$|f_n - f| \le h_n - g_n \le 2g \in L^1(\mu)$$

a $h_n - g_n \searrow 0$, tedy

$$\int |f_n - f| \, d\mu \le \int (h_n - g_n) \, d\mu \to 0$$

podle zobecněné Leviho věty, čili $f_n \xrightarrow{L^1} f$.

Přednáška 14.12.2021

Příklad: Položme

$$f_{i,j} := 2^{i/2}\chi_{[(j-1)2^{-i}, j2^{-i}]}, \quad j = 1, \ldots, 2^i,\ i \in \mathbb{N}.$$

Seřaďme $f_{i,j}$ do jedné posloupnosti (f_n). Pak $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$, a $f_n \xrightarrow{L^1} 0$, ale neexistuje žádná "konvergentní majoranta" pro tuto posloupnost. Příklad lze upravit tak, aby navíc $f_n \xrightarrow{s.v.} 0$. Podmínka existence konvergentní majorany v Lebesgueově větě je tedy postačující, ale ne nutná.

Pozn.: Pro každou funkci $f \in L^1(\mu)$ platí

$$\lim_{c\to\infty} \int_{\{|f|\geq c\}} |f|\, d\mu = 0.$$

Definice 8.1. Posloupnost (f_n) měřitelných funkcí na $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je *stejnoměrně integrovatelná* (*s.i.*), jestliže

$$\lim_{c\to\infty} \sup_n \int_{\{|f_n|\geq c\}} |f_n|\, d\mu = 0.$$

Tvrzení 8.1. *Je-li posloupnost (f_n) s.i. na prostoru s konečnou mírou μ, platí $f_n \in L^1(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, a*

$$\sup_n \|f_n\|_1 < \infty.$$

Důkaz. Pro c dostatečně velké platí

$$\int |f_n|\, d\mu = \int_{|f_n|\leq c} |f_n|\, d\mu + \int_{|f_n|>c} |f_n|\, d\mu \leq c\mu(X) + 1.$$

$\square$

Věta 8.2. *Nechť $\mu(X) < \infty$ a $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Pak*

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \iff (f_n) \text{ je s.i.}$$

Důkaz. Nejprve dokážeme implikaci $\Longleftarrow$. Předpokládejme tedy, že $f_n \xrightarrow{\mu} f$ a (f_n) je s.i.

(a) Podle Tvrzení 8.1 víme, že $f_n \in L^1$, $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že i $f \in L^1$. Buď (f_{n_j}) vybraná podposloupnost taková, že $f_{n_j} \to f$ s.v. Pak podle Fatouova lemmatu a Tvrzení 8.1 platí

$$\int |f|\, d\mu = \int \lim_{j\to\infty} |f_{n_j}|\, d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int |f_{n_j}|\, d\mu < \infty.$$

(b) Předpokládejme nejprve, že $|f_n| \leq c$, $n \in \mathbb{N}$, a $|f| \leq c$ pro nějaké $c < \infty$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ pak s $\delta := \varepsilon/(2\mu(X))$ platí

$$\int |f_n - f| = \int_{|f_n - f|\leq\delta} + \int_{|f_n-f|>\delta} \leq \delta\mu(X) + 2c\,\mu\{|f_n - f| > \delta\} < \varepsilon$$

pro n dostatečně velké, tedy $f_n \to f$ v L^1.

(c) Buďte f_n, f bez omezení z případu (b) a buď dáno $\varepsilon > 0$. Platí

$$\begin{aligned}\int |f_n - f| &\le \int\limits_{\substack{|f_n|\le c\\ |f|\le c}} |f_n - f| + \int\limits_{|f_n|>c} |f_n - f| + \int\limits_{|f|>c} |f_n - f| \\ &=: I_n^1(c) + I_n^2(c) + I_n^3(c).\end{aligned}$$

Odhadneme

$$I_n^2(c) \le \int\limits_{|f_n|>c} |f_n| + \int\limits_{\substack{|f_n|>c\\ |f|\le c}} |f| + \int\limits_{\substack{|f_n|>c\\ |f|>c}} |f| \le 2 \int\limits_{|f_n|>c} |f_n| + \int\limits_{|f|>c} |f|,$$

$$I_n^3(c) \le \int\limits_{\substack{|f_n|>c\\ |f|>c}} |f_n| + \int\limits_{\substack{|f_n|\le c\\ |f|>c}} |f_n| + \int\limits_{|f|>c} |f| \le \int\limits_{|f_n|>c} |f_n| + 2 \int\limits_{|f|>c} |f|,$$

sečtením pak dostaneme

$$I_n^2(c) + I_n^3(c) \le 3 \left(\int\limits_{|f_n|>c} |f_n| + \int\limits_{|f|>c} |f| \right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro dostatečně velké c a všechna n podle předpokladu stejnoměrné integrovatelnosti. Pro zvolené c je pak $I_n^1(c) < \frac{\varepsilon}{2}$ podle části (b). □

Důkaz implikace $\Longrightarrow$: Nechť $\mu(X) < \infty$ a $f_n \to f$ v L^1. Ukážeme, že (f_n) je s.i. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pro každé $c > 0$ platí

$$\begin{aligned}\int\limits_{|f_n|>c} |f_n| &\le \int\limits_{|f_n|>c} |f_n - f| + \int\limits_{\substack{|f_n|>c\\ |f|\le c/2}} |f| + \int\limits_{\substack{|f_n|>c\\ |f|>c/2}} |f| \\ &\le \int |f_n - f| + \tfrac{c}{2}\mu\{|f_n - f| > \tfrac{c}{2}\} + \int\limits_{|f|>c/2} |f|.\end{aligned}$$

Z předpokladu $f_n \xrightarrow{L_1} f$ a z Čebyševovy nerovnosti existuje n_0 takové, že

$$\int |f_n - f| + \tfrac{c}{2}\mu\{|f_n - f| > \tfrac{c}{2}\} < \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad n \ge n_0, \quad c > 0.$$

Protože $f \in L^1$, existuje $c_0 > 0$ takové, že $\int_{|f|>c/2} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $c > c_0$. Rovněž pro každou z funkcí $f_1, \dots, f_{n_0}$ existuje $c_i > 0$ tak, že $\int_{|f_i|>c} |f_i| < \varepsilon$, $c > c_i$, $i = 1, \dots, n_0$. Pro $c > \max\{c_0, c_1, \dots, c_{n_0}\}$ pak platí $\int_{|f_n|>c} |f_n| < \varepsilon$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tím je dokázána stejnoměrná integrovatelnost posloupnosti (f_n). □

Příklad: Sestrojíme posloupnost měřitelný funkcí (f_n) takovou, že $f_n \to 0$ s.v. i v $L_1(\mu)$, ale neexistuje konvergentní majoranta, tedy funkce $g \in L_1(\mu)$ taková, že $|f_n| \le g$ s.v. pro všechna n.

Uvažujme prostor $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ všech posloupností nul a jedniček, a $\Sigma^* = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{0,1\}^n$ nechť je prostor *konečných* posloupností nul a jedniček. Prvky $\sigma \in \Sigma^*$ můžeme chápat jako podmnožiny Σ a uvažujeme σ-algebru $\mathcal{A} := \sigma\Sigma^*$ a součinovou míru $\mu = \prod_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1)$ (jedná se o rozdělení posloupnosti nezávislých hodů symetrickou mincí). Pro $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma^*$ definujme

$$g(\sigma) := \begin{cases} 2^{n/2} & \text{pokud } \sum_{i=1}^n \sigma_i \le n/3, \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases}$$

$$f_\sigma(x) := g(\sigma)\chi_\sigma(x), \quad x \in X.$$

Budeme uvažovat limitu funkcí f_σ při $|\sigma| \to \infty$ ($|\sigma|$ značí délku konečné posloupnosti σ). (Ekvivalentně bychom mohli spočetnou množinu funkcí $(f_\sigma : \sigma \in \Sigma^*)$ srovnat do posloupnosti a uvažovat její limitu.) Ukážeme tyto tři vlastnosti:

1. $f_\sigma \xrightarrow{L^1} 0$,
2. $f_\sigma \xrightarrow{s.v.} 0$ a
3. $\int(\sup_\sigma f_\sigma)\, d\mu = \infty$ (tedy neexistuje konvergentní majoranta).

První vlastnost plyne snadno z faktu

$$\int f_\sigma(x)\, d\mu(x) = 2^{|\sigma|/2}\mu(\sigma) = 2^{|\sigma|/2}2^{-|\sigma|} = 2^{-|\sigma|/2} \to 0, \quad |\sigma| \to \infty.$$

Druhá vlastnost pak je důsledkem silného zákona velkých čísel, který říká, že

$$\mu\left\{x : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{2}\right\} = 1.$$

Pro skoro všechna x tedy platí, že $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i > \frac{1}{3}$ pro dostatečně velká n, a tedy $f_\sigma(x) \to 0$.

Pro třetí vlastnost stačí ukázat, že $\int g_n\, d\mu \to \infty$ pro

$$g_n := \sup_{\sigma\colon |\sigma| = n} f_\sigma, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Platí

$$\begin{aligned} \int g_n\, d\mu &= 2^{n/2}\mu\left\{x : \sum_{i=1}^n x_i \le \frac{n}{3}\right\} = 2^{n/2}\sum_{k=0}^{\lfloor n/3\rfloor}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \\ &\ge 2^{n/2}\frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\frac{2^{5/3}}{3}\right)^{-n} = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\frac{3}{2^{7/6}}\right)^n \to \infty, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Použili jsme dolní odhad pro distribuční funkci binomického rozdělení, který lze nalézt v literatuře a zde jej nebudeme ukazovat (je založen na Stirlingově vzorci).

Přednáška 21.12.2021

9 Hausdorffova míra

Pozn.: Látka této kapitoly nebude vyžadována u zkoušky.

Hausdorffova míra je určena pro měření podmnožin $\mathbb{R}^n$ nižší "dimenze" než n.

Definice 9.1. Pro $A \subset \mathbb{R}^n$, $s \geq 0$ a $\delta > 0$ položme

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf_{\substack{A \subset \bigcup_i G_i \\ \operatorname{diam} G_i \leq \delta}} \sum_i \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam} G_i}{2} \right)^s,$$

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0_+} \mathcal{H}^s_\delta(A),$$

kde $\operatorname{diam} B := \sup_{x,y \in B} \|x - y\|$ (diametr množiny B),

$$\omega_s := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}$$

(objem jednotkové koule v $\mathbb{R}^s$ pro případ $s \in \mathbb{N}$), a supremum je chápáno přes všechna *nejvýše* spočetná pokrytí *libovolnými* množinami s daným omezením diametru.

Pozn.:

1. Pro $0 < \delta_1 < \delta_2$ je zřejmě $\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \geq \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$, tedy limita v definici $\mathcal{H}^s$ existuje a platí $\mathcal{H}^s_\delta \nearrow \mathcal{H}^s(A)$, $\delta \to_+ 0$.
2. Protože pro každou množinu B platí $\operatorname{diam} B = \operatorname{diam} \overline{\operatorname{conv}} B$, kde $\overline{\operatorname{conv}} B$ je *uzavřený konvexní obal* množiny B, lze v definici ekvivalentně pokrývat pouze uzavřenými konvexními množinami.
3. Na příkladu omezené spirály nekonečné délky v $\mathbb{R}^2$ s $s = 1$ je vidět potřeba podmínky na diametr pokrývajících množin jdoucí k nule.

Tvrzení 9.1. *Pro všechna $s \geq 0$ platí:*

1. $\mathcal{H}^s_\delta$ *i* $\mathcal{H}^s$ *jsou vnější míry v* $\mathbb{R}^n$ *pro všechna* $\delta > 0$.
2. $\mathcal{H}^s$ *je* metrická *vnější míra.*
3. $\mathcal{H}^s$ *je* borelovsky regulární*, tedy ke každé* $A \subset \mathbb{R}^n$ *existuje* $B \in \mathcal{B}^n$ *taková, že* $A \subset B$ *a* $\mathcal{H}^s(B) = \mathcal{H}^s(A)$.
4. $\mathcal{H}^0$ *je čítací míra* ($\mathcal{H}^0(A) = \operatorname{card} A$).
5. $\mathcal{H}^s$ *je translačně a rotačně invariantní (tedy* $\mathcal{H}^s(A + z) = \mathcal{H}^s(R(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ *kdykoliv* $A \subset \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{R}^d$ *a* R *je ortogonální transformace v* $\mathbb{R}^n$*).*

6. $\mathcal{H}^s$ je homogenní řádu s (tedy $\mathcal{H}(tA) = t^s\mathcal{H}^s(A)$ kdykoliv $A \subset \mathbb{R}^d$ a $t > 0$).

Důkaz. 1. Pro $\mathcal{H}^s_\delta$ je důkaz stejný jako u vnější Lebesgueovy míry, $\mathcal{H}^s$ dostaneme limitním přechodem.

2. Nechť $\operatorname{dist}(A, B) =: \rho > 0$. Ukážeme, že $\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$. Nechť $\mathcal{H}^s(A \cup B) < \infty$ (jinak je nerovnost zřejmá). Buď $\varepsilon > 0$ a $0 < \delta < \rho$. Z Definice dostáváme existenci pokrytí $A \cup B \subset \bigcup_i G_i$ s $\operatorname{diam} G_i \leq \delta$ a

$$\sum_i \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam} G_i}{2}\right)^s < \mathcal{H}^s(A \cup B) + \varepsilon.$$

Každá z množin G_i protíná nejvýše jednu z množin A, B, tedy množiny indexů $I := \{i : G_i \cap A \neq \emptyset\}$ a $J := \{j : G_j \cap B \neq \emptyset\}$ jsou disjunktní. Z definice Hausdorffovy míry dostáváme

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B) &\leq \sum_{i\in I} \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam} G_i}{2}\right)^s + \sum_{j\in J} \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam} G_j}{2}\right)^s \\ &\leq \sum_i \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam} G_i}{2}\right)^s < \mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) + \varepsilon,\end{aligned}$$

a limitními přechody $\varepsilon \to 0$ a $\delta \to 0$ dostaneme žádanou nerovnost.

3. Nechť je dána $A \subset \mathbb{R}^n$. Pokud $\mathcal{H}^s(A) = \infty$, volíme $B = \mathbb{R}^d$. Nechť nyní $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují množiny G^n_i takové, že $\operatorname{diam} G^j_i \leq \frac{1}{n}$ a

$$\sum_i \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam} G^n_i}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s_{1/n}(A) + \frac{1}{n}.$$

Položne $B := \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_i \overline{G^n_i}$. B je zřejmě borelovská množina a obsahuje množinu A. Dále, protože $B \subset \bigcup_i \overline{G^n_i}$ pro každé n, platí

$$\mathcal{H}^s_{1/n}(B) \leq \sum_i \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam} \overline{G_i}}{2}\right)^s = \sum_i \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam} G_i}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s_{1/n}(A) + \frac{1}{n},$$

a limitním přechodem $n \to \infty$ dostaneme $\mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A)$. Opačná nerovnost je zřejmá.

4. Pro konečnou množinu $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ a $\delta > 0$ dostatečně malé je $\mathcal{H}^0_\delta(A) = n$, tedy $\mathcal{H}^0(A) = n$. Z monotonie plyne, že $\mathcal{H}^0(A) = \infty$, pokud A je nekonečná.

5. Plyne snadno z faktu, že diametr množiny je invariantní vzhledem k translacím a rotacím.

6. Plyne snadno z faktu $\operatorname{diam}(tA) = t \operatorname{diam} A$.

$\square$

Pozn.: Míra $\mathcal{H}^n$ (v $\mathbb{R}^n$) je lokálně konečná, tedy i σ-konečná. Jednotkovou krychli $[0,1]^n$ můžeme zapsat jako sjednocení k^n krychliček C_i^k, $i = 1, \dots, k^n$, o hraně $\frac{1}{k}$. Protože $\operatorname{diam} C_i^k = \frac{\sqrt{n}}{k}$, platí

$$\mathcal{H}^n_{\sqrt{n}/k}([0,1]^n) \le \omega_n k^n \left(\frac{\sqrt{n}}{2k}\right)^n = \omega_n \frac{n^{n/2}}{2^n} =: c_n,$$

a tedy $\mathcal{H}^n([0,1]^n) \le c_n < \infty$. Z toho již plyne, že míra $\mathcal{H}^n$ je násobkem Lebesgueovy míry; platí totiž:

Věta 9.2. *Každá lokálně konečná translačně invariantní borelovská míra v $\mathbb{R}^n$ je násobkem Lebesgueovy míry.*

Důkaz. Buď μ lokálně konečná translačně invariantní borelovská míra v $\mathbb{R}^n$, označme $c := \mu((0,1]^n)$. Buď $\mathcal{D}$ systém všech dyadických kvádrů tvaru

$$\left(\frac{i_1 - 1}{2^k}, \frac{i_1}{2^k}\right] \times \dots \times \left(\frac{i_n - 1}{2^k}, \frac{i_n}{2^k}\right], \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z},$$

včetně prázdné množiny. Z aditivity a translační invariantnosti μ dostáváme

$$\mu\left(\left(\frac{i_1 - 1}{2^k}, \frac{i_1}{2^k}\right] \times \dots \times \left(\frac{i_n - 1}{2^k}, \frac{i_n}{2^k}\right]\right) = \frac{c}{2^{kn}},$$

tedy μ a $c\lambda^n$ se shodují na množinách z $\mathcal{D}$. Protože systém $\mathcal{D}$ je uzavřen na konečné průniky, shodují se obě uvedené míry i na $\sigma\mathcal{D} = \mathcal{B}^n$. □

Nyní ukážeme, že se se Hausdorffova n-rozměrná míra skutečně rovná Lebesgueově míře. Ukážeme postupně obě nerovnosti.

Lemma 9.3. *$\mathcal{H}^n \le \lambda^n$.*

Důkaz. Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $\delta > 0$. Systém

$$\mathcal{F} := \{B \subset G \text{ uzavřená koule}, \operatorname{diam} B \le \delta\}.$$

je zřejmě Vitaliovým pokrytím množiny G, tedy podle Vitaliovy věty existují disjunktní koule $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$ takové, že $\lambda^n(G \setminus \bigcup_i B_i) = 0$. Protože $\mathcal{H}^n$ je násobkem λ^n, je absolutně spojitá vzhledem k λ^n, a tedy také $\mathcal{H}^n(G \setminus \bigcup_i B_i) = 0$. Z toho plyne i $\mathcal{H}^n_\delta(G \setminus \bigcup_i B_i) = 0$, což podle definice znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje pokrytí $G \setminus \bigcup_i B_i \subset \bigcup_j D_j$ s $\operatorname{diam} D_j \le \delta$ a

$$\sum_j \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} D_j}{2}\right)^n < \varepsilon.$$

Máme tedy $G \subset \bigcup_i B_i \cup \bigcup_j D_j$ a

$$\mathcal{H}^n_\delta(G) \le \sum_i \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} B_i}{2}\right)^n + \sum_j \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} D_j}{2}\right)^n \le \lambda^n(G) + \varepsilon,$$

a limitním přechodem $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ dostaneme $\mathcal{H}^n(G) \le \lambda^n(G)$, z čehož už plyne dokazovaná nerovnost. □

Pro opačnou nerovnost budeme potřebovat následující větu z oboru konvexní geometrie:

Věta 9.4 (Izodiametrická nerovnost)**.**

$$\lambda^{n*}(A) \le \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} A}{2} \right)^n, \quad A \subset \mathbb{R}^n.$$

Lemma 9.5. *$\lambda^n \le \mathcal{H}^n$.*

Důkaz. Je-li $A \subset \bigcup_i G_i$ libovolné pokrytí množiny A, platí podle izodiametrické nerovnosti

$$\lambda^{n^*}(A) \le \sum_i \lambda^{n^*}(G_i) \le \sum_i \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} G_i}{2} \right)^n.$$

Z definice Hausdorffovy míry pak plyne $\mathcal{H}^n_\delta(A) \ge \lambda^{n*}(A)$ pro každé $\delta > 0$, a tedy také $\mathcal{H}^n(A) \ge \lambda^{n*}(A)$. $\square$

Přednáška 4.1.2022

Idea důkazu izodiametrické nerovnosti. Nejprve si uvědomme, že *uzavřený konvexní obal* množiny A (nejmenší konvexní uzavřená množina obsahující A) má větší nebo rovnou Lebesgueovu míru, ale stejný diametr jako A. Nerovnost tedy stačí ukázat pro konvexní kompaktní množinu A.

Označme symbolem Π_i kolmou projekci do nadroviny $E_i := \{x_i = 0\}$, a pro $y \in E_i$ označme řez

$$A^{i,y} := \{x \in A : \Pi_i x = y\}.$$

Dále buď $A_0^{i,y}$ "symetrizace" úsečky $A^{i,y}$ (posunutí ve směru kolmém k E_i tak, aby střed ležel v E_i). Množina $\mathrm{St}_i(A) := \bigcup_{y \in \Pi_i(A)} A_0^{i,y}$ je rovněž konvexní a kompaktní, navíc symetrická podle E_i a splňuje

- $\operatorname{diam} \mathrm{St}_i(A) \leq \operatorname{diam} A$,
- $\lambda^n(\mathrm{St}_i(A)) = \lambda^n(A)$ (z Fubiniovy věty).

Iterováním definujeme *Steinerovu symetrizaci* množiny A

$$\mathrm{St}(A) := \mathrm{St}_n \circ \mathrm{St}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathrm{St}_1(A).$$

Jedná se opět o konvexní a kompaktní množinu, která je symetrická podle všech souřadnicových nadrovin, a tedy podle počátku, má stejnou Lebesgueovu míru jako A, a menší nebo rovný diametr. Ze středové symetrie plyne

$$\mathrm{St}(A) \subset B\left(0, \frac{\operatorname{diam}(\mathrm{St}(A))}{2}\right),$$

tedy

$$\lambda^n(A) = \lambda^n(\mathrm{St}(A)) \leq \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam}(\mathrm{St}(A))}{2}\right)^n \leq \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} A}{2}\right)^n.$$

□

Lemma 9.6. *Pro* $0 \leq s < t$ *a* $A \subset \mathbb{R}^n$ *platí*

$$\mathcal{H}^s(A) < \infty \implies \mathcal{H}^t(A) = 0, \tag{13}$$

$$\mathcal{H}^t(A) > 0 \implies \mathcal{H}^t(A) = \infty. \tag{14}$$

Pozn.: Zřejmým důsledkem lemmatu je, že $\mathcal{H}^s = 0$ pro $s > n$.

Důkaz. Výroky (13) a (14) jsou zřejmě ekvivalentní. Doklážeme (13). Nechť $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ a $\delta > 0$. Platí $\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s(A)$, tedy existuje pokrytí $A \subset \bigcup_i G_i$ takové, že $\operatorname{diam} G_i \leq \delta$ a

$$\sum_i \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam} G_i}{2}\right)^s < \mathcal{H}^s(A) + 1.$$

Pro $t > s$ tedy je

$$\sum_i \omega_t \left(\frac{\operatorname{diam} G_i}{2}\right)^t = \frac{\omega_t}{\omega_s} \sum_i \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam} G_i}{2}\right)^s \left(\frac{\operatorname{diam} G_i}{2}\right)^{t-s}$$
$$\leq \frac{\omega_t}{\omega_s} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{t-s} (\mathcal{H}^s(A) + 1),$$

a tedy i

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \frac{\omega_t}{\omega_s} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{t-s} (\mathcal{H}^s(A) + 1).$$

Limitním přechodem $\delta \to 0_+$ pak dostaneme $\mathcal{H}^t(A) = 0$. □

Definice 9.2. Hausdorffovu dimenzi *množiny* $A \subset \mathbb{R}^n$ *definujeme jako*

$$\dim_H A := \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Pozn.: Podle předchozího lemmatu je $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ pro $0 \leq s < \dim_H A$ a $\mathcal{H}^s(A) = 0$ pro $s > \dim_H A$.

Z definice snadno plyne, že pro S nejvýše spočetnou je $\dim_H S = 0$, a že $\dim_H([0,1]^n) = n$.

Najdeme Hausdorffovu dimenzi pro Cantorovo diskontinuum C. Připomeňme, že Cantorovo diskontinuum je derfinováno jako průnik $C = \bigcap_{n=0}^\infty C_n$, přitom $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$ a C_n je disjunktním sjednocením 2^n uzavřených intervalů délky 3^{-n}. Označme $\mathcal{I}_n$ množinu intervalů tvořících C_n, tedy $C_n = \bigcup \mathcal{I}_n$. Z definice Hausdorffovy míry snadno dostáváme odhad

$$\mathcal{H}^s_{3^{-n}}(C) \leq \omega_s 2^n \left(\frac{1}{2 \cdot 3^n}\right)^s = \frac{\omega_s}{2^s} \left(\frac{2}{3^s}\right)^n.$$

Pro hodnotu $s_0 := \frac{\log 2}{\log 3}$ je $2 = 3^s$, a tedy

$$\mathcal{H}^{s_0}_{3^{-n}}(C) \leq \frac{\omega_s}{2^s}, \quad n \in \mathbb{N},$$

a tedy také

$$\mathcal{H}^{s_0}(C) \leq \frac{\omega_s}{2^s} \text{ a } \dim_H C \leq s_0.$$

Ukážeme, že platí i obrácená nerovnost, tedy $\mathcal{H}^{s_0} = \frac{\omega_s}{2^s}$ a $\dim_H C = s_0$. To plyne z následujícího lemmatu.

Lemma 9.7. *Je-li* $C \subset \bigcup_i J_i$, *pak* $\sum_i |J_i|^{s_0} \geq 1$. *(Zde* J_i *jsou intervaly a* $|J_i|$ *značí délku intervalu* J_i*).*

Důkaz. Lemma stačí ukázat pro otevřené intervaly. Vzhledem k tomu, že C je kompaktní, stačí uvažovat konečné pokrytí $C \subset J_1 \cup \dots \cup J_k$. Pokud mají některé dva různé intervaly J_i, J_j neprázdný průnik, pak $J_i \cap J_j \cap C^c$ obsahuje otevřený interval (protože komplement C^c Cantorova diskontinua je hustá otevřená množina) a můžeme intervaly J_i, J_j zmenšit tak, aby byly disjunktní, ale stále platilo $C \subset J_1 \cup \cdots \cup J_k$. Krajní body každého intervalu J_i leží mimo množinu C a nahradíme-li interval J_i uzavřeným podintervalem

$$I_i := [\min(J_i \cap C), \max(J_i \cap C)],$$

bude opět platit $C \subset I_1 \cup \cdots \cup I_k$, a stačí dokázat, že

$$|I_1|^{s_0} + \cdots + |I_k|^{s_0} \geq 1.$$

Všimněme si, že všechny krajní body intervalů I_i jsou krajními body nějaké aproximace C_n, a tedy existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\partial I_i \in \partial C_n$, $i = 1, \ldots, k$. Pokud by intervaly $I_1, \ldots, I_k$ kopírovaly právě všechny intervaly tvořící C_n, byli bychom hotovi, neboť

$$\sum_{I \in \mathcal{I}_n} |I|^{s_0} = 2^n (4^{-n})^{s_0} = (2/3^{s_0})^n = 1.$$

Ukážeme, že pro každý interval $J = [a, b]$, kde $a, b \in \partial C_n$, platí

$$|J|^{s_0} \geq \sum_{I \in \mathcal{I}_n, I \supset J} |I|^{s_0}. \tag{15}$$

Z toho již plyne potřebná nerovnost.

Označme $N = (c, d)$ maximální podinterval J ležící v C^c, a označme $u := c - a$, $w := d - c$ a $v := b - d$. Z konstrukce Cantorova diskuontinua je zřejmé, že $u \leq w$ a $v \leq w$. Platí

$$\begin{aligned}(u + v + w)^{s_0} &\geq \left(u + v + \frac{u+v}{2}\right)^{s_0} = \left(\frac{3}{2}(u+v)\right)^{s_0} \\ &= 3^{s_0} \left(\frac{u+v}{2}\right)^{s_0} \geq 3^{s_0} \frac{u^{s_0} + v^{s_0}}{2} = u^{s_0} + v^{s_0}\end{aligned}$$

(nerovnost plyne z konkavity funkce $t \mapsto t^{s_0}$). Nahradíme-li tedy v pokrytí množiny C interval $[a, b]$ dvěma intervaly $[a, c] \cup [d, b]$, součet s_0-tých mocnin délek se nezvětší. Takto můžeme pokračovat tak dlouho, až každý interval I_i nahradíme právě podintervaly tvořícími množinu C_n. Tím bude nerovnost (15) dokázána. $\square$