Teorie míry a integrálu 1

Desátá přednáška

7.12.2020

Radon-Nikodymova věta - připomenutí

Věta (Radon-Nikodym)

Buďte μ, ν dvě σ-konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že $\nu \ll \mu$. Pak existuje nezáporná měřitelná funkce f na X taková, že

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Poznámka

Hustota $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ je určena jednoznačně modulo ekvivalence $\sim$.

Tvrzení

Buďte μ, ν dvě konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že $\nu(A) \le \mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$. Pak existuje měřitelná funkce f na X splňující $0 \le f \le 1$ μ-s.v. a

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Singulární míry

Definice

Řekneme, že dvě míry μ, ν na témže měřitelném prostoru $(X, \mathcal{A})$ jsou vzájemně singulární (píšeme $\mu \perp \nu$), jestliže existuje množina $S \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(S) = 0$ a $\nu(X \setminus S) = 0$.

Singulární míry

Definice

Řekneme, že dvě míry μ, ν na témže měřitelném prostoru $(X, \mathcal{A})$ jsou vzájemně singulární (píšeme $\mu \perp \nu$), jestliže existuje množina $S \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(S) = 0$ a $\nu(X \setminus S) = 0$.

Příklady

- *Je-li $x \neq y$, pak pro Diracovy míry platí $\delta_x \perp \delta_y$.*
- *$\lambda^1 \perp \delta_x$ pro každý $x \in \mathbb{R}$.*
- *$\lambda^1 \perp \mu$, kde μ je aritmetická míra na množině celých čísel.*

Rozklad míry na absolutně spojitou a singulární část

Věta

Buďte μ, ν dvě σ-konečné míry na témže měřitelném prostoru. Pak existuje rozklad $\nu = \nu_a + \nu_s$ na míry ν_a, ν_s takový, že $\nu_a \ll \mu$ a $\nu_s \perp \mu$. Míry ν_a a ν_s jsou jednoznačně určeny.

Rozklad míry na absolutně spojitou a singulární část

Věta

Buďte μ, ν dvě σ-konečné míry na témže měřitelném prostoru. Pak existuje rozklad $\nu = \nu_a + \nu_s$ na míry ν_a, ν_s takový, že $\nu_a \ll \mu$ a $\nu_s \perp \mu$. Míry ν_a a ν_s jsou jednoznačně určeny.

Poznámka

Míra ν_a se nazývá absolutně spojitá část a míra ν_s singulární část míry ν vzhledem k μ.

Pramíra na algebře

Definice

Nechť $X \neq \emptyset$ a $\mathcal{A}$ je algebra podmnožin X. Řekneme, že funkce $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ je *pramíra*, jestliže

(i) $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$,

(ii) pro libovolné množiny $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní a takové, že i $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, platí

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i).$$

Poznámka

$\tilde{\mu}$ je zřejmě monotónní.

Příklad

Množinová funkce

$$\tilde{\mu}(A) := \begin{cases} 0, & A \subset \mathbb{N} \text{ konečná}, \\ \infty, & A \subset \mathbb{N} \text{ nekonečná} \end{cases}$$

je *konečně* aditivní množinová funkce na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, která není σ-aditivní.

Věta o rozšíření míry

Věta (Hahn-Kolmogorov)

Buď $\tilde{\mu}$ pramíra na algebře $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X. Pak existuje míra μ na $\sigma\mathcal{A}$ taková, že $\tilde{\mu} = \mu$ na $\mathcal{A}$. Je-li $\tilde{\mu}$ σ-konečná, je μ jednoznačně určena.

[Bez důkazu (bude v navazující přednášce)]

Spojitost v prázdné množině

Tvrzení

Buď $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ *konečná, konečně aditivní funkce na algebře* $\mathcal{A}$ *splňující* $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$. *Pak* $\tilde{\mu}$ *je* σ*-aditivní právě tehdy, když*

$$A_i \in \mathcal{A},\ A_i \searrow \emptyset \implies \tilde{\mu}(A_i) \to 0. \tag{1}$$

Poznámka

Vlastnosti (1) *se říká spojitost* $\tilde{\mu}$ *v prázdné množině.*

Příklad

$\mathcal{S}_0 := \{\emptyset\} \cup \{(a,b] : a \in [-\infty,\infty), b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,\infty) : a \in [-\infty,\infty),$

$\mathcal{A}_0 := \{$konečná sjednocení prvků z $\mathcal{S}_0\}$

- $\mathcal{A}_0$ je algebra
- $\tilde{\lambda}(A) :=$ součet délek intervalů v A, $A \in \mathcal{A}_0$, je pramíra
- rozšířením $\tilde{\lambda}$ na $\sigma\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ je Lebesgueova míra λ^1.
- Položme pro $A \in \mathcal{A}_0$

$$\tilde{\mu}(A) := \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ \infty, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

$\tilde{\mu}$ je zřejmě pramíra, nemá ale jednoznačné rozšíření na $\sigma\mathcal{A}_0$. Jedním možným rozšířením je míra definovaná stejným předpisem jako $\tilde{\mu}$ (tedy 0 pro prázdnou množinu a ∞ pro všechny neprázdné množiny), jiným rozšířením je aritmetická míra, nebo její libovolný kladný násobek.

Příklad

- $X := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (posloupnosti $0-1$)
- $\Pi_n : X \to \{0,1\}^n$ projekce do prvních n souřadnic ($n \in \mathbb{N}$)
- $\mathcal{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n^{-1}(\mathcal{P}\{0,1\}^n)$ - algebra
- $\tilde{\mu}(\Pi_n^{-1}(B)) := \frac{\text{card } B}{2^n}$
- $\tilde{\mu}$ - konečně aditivní množinová funkce na $\mathcal{A}$
- $\tilde{\mu}$ je spojitá v prázdné množině, tedy σ-aditivní
- Podle Hahn-Kolmogorovovy věty tedy existuje její jednoznačné rozšíření na míru μ na $\mathcal{B} := \sigma\mathcal{A}$.
- μ je pravděpodobnostní míra a má význam rozložení pravděpodobnosti pro posloupnost nezávislých opakování pokusu hodu mincí.

Důkaz spojitosti v prázdné množině

Na množině X zavedeme metriku

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}, \quad x, y \in X.$$

Potřebujeme tyto znalosti z matematické analýzy:

1. Konvergence posloupnosti v (X, d) je ekvivalentní konvergenci posloupností všech souřadnic.
2. (X, d) je kompaktní metrický prostor.
3. Každá množina $A \in \mathcal{A}$ je otevřená i uzavřená v (X, d).

Jsou-li $A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $A_n \searrow \emptyset$, pak z kompaktnosti A_n plyne, že existuje n_0 takové, že $A_n = \emptyset$ pro $n > n_0$. Pak ale jistě $\tilde{\mu}(A_n) \to 0$, je tedy splněna podmínka (1) a tudíž $\tilde{\mu}$ je pramíra.