Teorie míry a integrálu 1

Třináctá přednáška

4.1.2021

Obsah

1. Existence neměřitelné množiny (opakování z první přednášky)
2. Konstrukce borelovské σ-algebry transfinitní indukcí (pro informaci, nepovinné)

Existence neměřitelné množiny - opakování

Věta

Existuje Lebesgueovsky neměřitelná podmnožina $\mathbb{R}$.

Plyne z

Věta

Neexistuje míra $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ *splňující*

(*) $\mu(I) = \textit{délka}(I)$ *pro každý interval* I,

(**) $\mu(A + x) = \mu(A)$, $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz

Sporem: nechť taková μ existuje.
Uvažujme ekvivalenci na $\mathbb{R}$

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Množina $A \subset [0,1]$ nechť obsahuje právě jeden prvek z každé třídy ekvivalence $\sim$ (používáme axiom výběru!). Buď dále $\mathbb{Q} \cap [-1,1] = \{q_1, q_2, \dots\}$ očíslování racionálních čísel v intervalu $[-1,1]$. Nyní platí:

(a) $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A + q_i) \supset [0,1]$ (protože pro každý $x \in [0,1]$ existuje $a \in A$ takové, že $x - a \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, tedy $x - a = q_i$ pro nějaké i, čili $x \in A + q_i$),

(b) $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A + q_i) \subset [-1,2]$,

(c) množiny $A + q_i$ jsou po dvou disjunktní ($i = 1, 2, \dots$) (kdyby ne, pak by A obsahovala dva ekvivalentní prvky).

Důkaz - dokončení

Ze σ-aditivity, (**) a (c) plyne, že $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A+q_i))=\infty$ jakmile $\mu(A)>0$, což by bylo v rozporu s (b). Musí tedy být $\mu(A)=0$. Pak ale i $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A+q_i))=0$, což podle (a) a (*) znamená $0>\mu([0,1])=1$, tedy spor.

Dobré uspořádání

Definice

Množina M je *dobře uspořádaná* relací $<$, jestliže

- $<$ je tranzitivní,
- $\forall a, b \in M$: $(a < b) \vee (a = b) \vee (b < a)$,
- každá neprázdná podmnožina M má nejmenší prvek vzhledem k $<$.

Příklad: $(\mathbb{N}, <)$.

Definice

Množina α je *ordinál*, jestliže

- $(\alpha, \in)$ je dobré uspořádání,
- každý prvek α je zároveň podmnožinou α.

Ord := třída všech ordinálů

Příklady:

$\emptyset =: 0$, $\{\emptyset\} =: 1$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} =: 2$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} =: 3, \dots$

$n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$

$\{0, 1, 2, \dots\} =: \omega$, $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\dots$, 2ω, $2\omega + 1$, $\dots$

Vlastnosti ordinálních čísel

- $\alpha \in \mathrm{Ord}$, $\beta \in \alpha \implies \beta \in \mathrm{Ord}$.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$, $\alpha \in \beta \iff \alpha \subsetneq \beta$.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$, $(\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta) \vee (\beta \in \alpha)$.
- Každá množina ordinálů je dobře uspořádaná relací $\in$ (značíme $<$).
- $\forall \alpha \in \mathrm{Ord} : \alpha = \{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta < \alpha\}$.

Věta

Je-li M množina orinálů, pak

$$\sup M = \bigcup\{\alpha :\ \alpha \in M\} \in \mathrm{Ord}\,.$$

Definice

Ordinál α je *následník*, jestliže $\alpha = \beta + 1$ pro nějaký $\beta \in \mathrm{Ord}$.
Ordinál α je *limitní*, jestliže není následník.

Příklady:
následníci: $1, 2, 3, \dots.\ \omega + 1, \omega + 2, \dots.\ 2\omega + 1, 2\omega + 2, \dots.$
limitní ordinály: $\omega, 2\omega,\ \dots,\ \omega \times \omega$
$\omega_1 :=$ nejmenší *nespočetný* ordinál

Konstrukce borelovské σ-algebry

X metrický prostor, $\mathcal{G}$ množina otevřených podmnožin X
pro $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ definujme

$$\tau\mathcal{S} := \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i : (A_i \in \mathcal{S}) \vee (A_i^C \in \mathcal{S}),\ i \in \mathbb{N} \right\}$$

Definujeme *transfinitní indukcí* systém $\mathcal{S}_\alpha$ pro každý $\alpha \in \mathrm{Ord}$ následovně:

- $\mathcal{S}_0 = \mathcal{G}$.
- $\mathcal{S}_{\alpha+1} = \tau\mathcal{S}_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{Ord}$.
- $\mathcal{S}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{S}_\beta$, α limitní ordinál.

Věta

$\mathcal{S}_{\omega_1} = \mathcal{B}(X)$.

Důkaz: Zřejmě $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}_{\omega_1} \subset \mathcal{B}(X)$. Stačí ukázat, že $\mathcal{S}_{\omega_1}$ je σ-algebra.

- $A \in \mathcal{S}_{\omega_1} \implies A \in \mathcal{S}_\alpha$ pro nějaký $\alpha < \omega_1$. Pak $A^C \in \mathcal{S}_{\alpha+1} = \tau\mathcal{S}_\alpha$, a tedy $A^C \in \mathcal{S}_{\omega_1}$.
- Nechť $A_i \in \mathcal{S}_{\omega_1}$, $i \in \mathbb{N}$. Pak $A_i \in \mathcal{S}_{\alpha_i}$ pro nějaký $\alpha_i < \omega_1$ a všechny množiny A_i leží v $\mathcal{S}_\alpha$ pro $\alpha = \sup_i \alpha_i$. Podle konstrukce pak $\bigcup_i A_i \in \mathcal{S}_{\alpha+1}$. Protože α_i jsou spočetné ordinály, též $\alpha, \alpha+1$ jsou spočetné, tedy $\alpha + 1 < \omega_1$ a tudíž $\bigcup_i A_i \in \mathcal{S}_{\omega_1}$.