Teorie míry a integrálu 1

Druhá přednáška

12.10.2020

Měřitelné funkce

Věta

Uvažujme zobrazení $f : X \to Y$.

(i) *Je-li $\mathcal{B}$ σ-algebra na Y, pak $f^{-1}\mathcal{B} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ je σ-algebra na X.*

(ii) *Pro libovolný množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ platí $\sigma(f^{-1}\mathcal{S}) = f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$.*

Tedy množinový vzor komutuje se σ-obalem.

Definice

Buďte $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{B})$ měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ je *měřitelné* (vzhledem k $\mathcal{A}, \mathcal{B}$), jestliže $f^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Píšeme pak $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$. Je-li některý z prostorů X, Y metrickým prostorem, pak za příslušnou σ-algebru bereme borelovskou σ-algebru. Měřitelné zobrazení mezi dvěma metrickými prostory nazýváme *borelovsky měřitelné* nebo stručně *borelovské*.

Definice

Buďte $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{B})$ měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ je *měřitelné* (vzhledem k $\mathcal{A}, \mathcal{B}$), jestliže $f^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Píšeme pak $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$. Je-li některý z prostorů X, Y metrickým prostorem, pak za příslušnou σ-algebru bereme borelovskou σ-algebru. Měřitelné zobrazení mezi dvěma metrickými prostory nazýváme *borelovsky měřitelné* nebo stručně *borelovské*.

Poznámky

1. Složení dvou měřitelných zobrazení je zřejmě měřitelné.
2. Jsou-li $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{B})$ měřitelné prostory a $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ libovolný generátor σ-algebry $\mathcal{B}$ (tzn. platí-li $\sigma\mathcal{S} = \mathcal{B}$), pak $f : X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$. (Plyne z Věty.)
3. Je-li $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor a Y metrický prostor, pak zobrazení $f : X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ pro každou otevřenou množinu $G \subset Y$.

Borelovská měřitelnost

Tvrzení

Každé spojité zobrazení mezi dvěma metrickými prostory je borelovsky měřitelné.

Borelovská měřitelnost

Tvrzení

Každé spojité zobrazení mezi dvěma metrickými prostory je borelovsky měřitelné.

Věta

Borelovská σ-algebra $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ je generovaná

1. *otevřenými kvádry (tj. množinami* $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$;
2. *systémem* $\mathcal{S} = \{(-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_n) : \ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$.

Speciálně, $\mathcal{B}^1 = \sigma\{(-\infty, a) : \ a \in \mathbb{R}\}$.

Poznámka

Jako generátor $\mathcal{B}^n$ lze vzít rovněž uzavřené či polouzavřené kvádry. Navíc stačí vzít pouze kvádry s racionálními koncovými body.

Věta

1. *Jsou-li* $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ *a* $g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^m$ *měřitelná zobrazení, pak i* $(f, g) : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^{n+m}$ *je měřitelné.*
2. *Jsou-li* $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ *měřitelná, jsou i* $f + g$ *a* $f - g$ *měřitelná.*
3. *Jsou-li* $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ *měřitelné funkce, jsou i* $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$ *a* $\min\{f, g\}$ *měřitelné.*

Věta

1. *Jsou-li* $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ *a* $g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^m$ *měřitelná zobrazení, pak i* $(f, g) : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^{n+m}$ *je měřitelné.*
2. *Jsou-li* $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ *měřitelná, jsou i* $f + g$ *a* $f - g$ *měřitelná.*
3. *Jsou-li* $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ *měřitelné funkce, jsou i* $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$ *a* $\min\{f, g\}$ *měřitelné.*

Důsledek

Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ *měřitelné funkce, pak leží množiny* $\{f \leq g\}$, $\{f < g\}$ *a* $\{f = g\}$ *v* σ*-algebře* $\mathcal{A}$.

Limity měřitelných funkcí

Budeme značit $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,
$\mathcal{B}^* := \sigma(\mathcal{B}^1 \cup \{\{-\infty\}, \{\infty\}\})$. $\mathcal{B}^*$ je rovněž generována intervaly a předchozí tvrzení pro reálné měřitelné funkce platí i pro "numerické" měřitelné funkce s hodnotami v $\mathbb{R}^*$.

Limity měřitelných funkcí

Budeme značit $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,
$\mathcal{B}^* := \sigma(\mathcal{B}^1 \cup \{\{-\infty\}, \{\infty\}\})$. $\mathcal{B}^*$ je rovněž generována intervaly a předchozí tvrzení pro reálné měřitelné funkce platí i pro "numerické" měřitelné funkce s hodnotami v $\mathbb{R}^*$.

Věta

Buďte $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelné, $n \in \mathbb{N}$. Pak jsou funkce $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ a $\liminf_{n\to\infty} f_n$ rovněž měřitelné.

Poznámka

Z předchozí věty plyne, že limita měřitelných funkcí je měřitelná, pokud existuje.

Aproximace nezáporných měřitelných funkcí jednoduchými

Definice

Funkce $s : X \to [0, \infty)$ je *jednoduchá*, jestliže $s(X)$ je konečná množina.

Aproximace nezáporných měřitelných funkcí jednoduchými

Definice

Funkce $s : X \to [0, \infty)$ je *jednoduchá*, jestliže $s(X)$ je konečná množina.

Věta

Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ *měřitelná, existují funkce* $s_n : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty)$ *jednoduché měřitelné takové, že* $s_n \nearrow f$ $(n \to \infty)$.