# Přednáška 26.10.2020

## 5 Integrály závislé na parametru

V následujícím textu budeme pracovat s funkcemi $f : T \times X \to \mathbb{R}$. Symbolem $f(\cdot, x)$ a $f(t, \cdot)$ budeme rozumět vždy funkci jedné proměnné (znázorněné tečkou) při pevné hodnotě (parametru) druhé proměnné.

**Věta 5.1 (Lebesgueova; o spojité závislosti integrálu na parametru)** *Buďte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $T$ metrický prostor a $f : T \times X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

(i) *$f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in T$,*

(ii) *$f(\cdot, x)$ je spojitá na $T$ pro s.v. $x \in X$,*

(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f(t, \cdot)| \leq g$ s.v. pro všechna $t \in T$.*

*Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in T$ a funkce*

$$F : t \mapsto \int f(t, x) \, d\mu(x)$$

*je spojitá na $T$.*

**Důkaz:** Z předpokladu $|f(t, \cdot)| \leq g$ s.v. zřejmě plyne $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $t \in T$. Označme $N \subset X$ množinu nulové míry takovou, že $f(\cdot, x)$ je spojitá na $T$ pro všechna $x \in X \setminus N$. Zvolíme-li libovolnou posloupnost $t_j \to t$ v $T$ a libovolný $x \in X \setminus N$, platí podle Heineho věty $\lim_{j\to\infty} f(t_j, x) = f(t, x)$. Podle Lebesgueovy věty (o konvergentní majorantě) platí $\lim_{j\to\infty} F(t_j) = F(t)$. Toto platí pro každou posloupnost $t_j \to t \in T$, a tedy $F$ je spojitá na $T$, opět podle Heineho věty. $\square$

**Věta 5.2 (Záměna integrálu a derivace)** *Buďte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval a $f : I \times X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

(i) *$f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in I$,*

(ii) *existuje $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$, taková, že pro všechna $x \in X \setminus N$ a pro všechna $t \in I$ existuje vlastní derivace $\frac{d}{dt} f(t, x)$,*

(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že pro všechna $t \in I$, $|\frac{d}{dt} f(t, x)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in X$,*

(iv) *existuje $t_0 \in I$ takové, že $f(t_0, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.*

*Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in I$, funkce*

$$F : t \mapsto \int f(t, x) \, d\mu(x)$$

*je diferencovatelná na $I$ a platí*

$$F'(t) = \int \frac{d}{dt} f(t, x) \, d\mu(x), \quad t \in I.$$

**Důkaz:** Pro libovolné $a, b \in I$, $a < b$, a $x \in X \setminus N$ existuje podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě $c_x \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f(b,x) - f(a,x)}{b-a} = \frac{d}{dt} f(c_x, x).$$

Z předpokladu (iii) plyne, že funkce $x \mapsto \frac{d}{dt} f(c_x, x)$ leží v prostoru $\mathcal{L}^1(\mu)$. Zvolíme-li za jeden z bodů $a, b$ bod $t_0$, dostaneme $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in I$. Uvažujme nyní libovolnou posloupnost $t_j \to t \in I$, $I \ni t_j \neq t$. Platí

$$\lim_{j\to\infty} \frac{F(t_j) - F(t)}{t_j - t} = \lim_{j\to\infty} \int \frac{f(t_j, x) - f(t, x)}{t_j - t} \, d\mu(x) = \int \frac{d}{dt} f(t, x) \, d\mu(x);$$

poslední rovnost plyne z Lebesgueovy věty o konvergentní majorantě a z definice derivace. Protože uvedená rovnost platí pro libovolnou posloupnost $t_j \to t \in I$, $t_j \neq t$, dostáváme $F'(t) = \int \frac{d}{dt} f(t, x) \, d\mu(x)$, $t \in I$. $\square$

# 6 Lebesgueova míra na přímce

**Věta 6.1** *Je-li $f \geq 0$ měřitelná funkce na prostoru s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a platí-li $\int f \, d\mu = 0$, je $f = 0$ s.v.*

**Důkaz:** Označme $A_n := \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Zřejmě $A_n \in \mathcal{A}$, $\chi_{A_n} \leq nf$, a tedy $\mu(A_n) = \int \chi_{A_n} \, d\mu \leq n \int f \, d\mu = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Protože $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, platí $\mu(\{f > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$. $\square$

**Důsledek:** Jsou-li $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f \leq g$ a $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$, pak $f = g$ s.v.

**Důsledek 6.2** *Nechť pro funkci $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ platí $\int_E f \, d\mu = 0$ pro každou množinu $E \in \mathcal{A}$. Pak $f = 0$ s.v.*

**Důkaz:** Zvolme nejprve $E_+ := \{f > 0\}$. Pak podle předpokladu platí $\int f^+ \, d\mu = \int_{E_+} f \, d\mu = 0$, a protože $f^+ \geq 0$, je $f^+ = 0$ s.v. podle Věty 6.1. Podobně volbou $E_- := \{f < 0\}$ odvodíme, že $f^- = 0$ s.v. Pak ale musí být $f = 0$ s.v. $\square$

**Značení:** Budeme uvažovat restrikci (zúplněné) Lebesgueovy míry $\lambda^1$ na omezený otevřený interval $(a, b)$. Budeme značit $\mathcal{L}^1(a, b)$ příslušný prostor integrovatelných funkcí a $\int_a^b f \, d\lambda^1$ Lebesgueův integrál z funkce $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$. Dále symbolem $\mathcal{R}[a, b]$ značíme množinu všech omezených funkcí na $[a, b]$, pro něž existuje Riemannův integrál (R) $\int_a^b f$.

**Věta 6.3 (Vztah Lebesgueova a Riemannova integrálu)** *Je-li $f \in \mathcal{R}[a, b]$, pak $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$ a (R) $\int_a^b f = \int_a^b f \, d\lambda^1$.*

**Důkaz:** Protože $f \in \mathcal{R}[a,b]$, existuje posloupnost $(\mathcal{D}_n)$ zjemňujících se dělení intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\mathfrak{s}(f,\mathcal{D}_n) \nearrow (\mathrm{R})\int_a^b f \swarrow \mathscr{S}(f,\mathcal{D}_n), \quad n \to \infty$$

($\mathfrak{s}(f,\mathcal{D}_n)$ a $\mathscr{S}(f,\mathcal{D}_n)$ značí dolní a horní Riemannův součet $f$ přes dělení $\mathcal{D}_n$). Je-li $\mathcal{D}_n = \{a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b\}$, zaveďme funkce $s_n, S_n$ předpisem

$$s_n(x) = \inf_{[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]} f, \quad S_n(x) = \sup_{[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]} f, \quad x \in (x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}],\ i = 1,\dots,k_n,$$

a $s_n(x) = S_n(x) = 0$ pro ostatní hodnoty $x \in \mathbb{R}$. Pak zřejmě platí

$$\mathfrak{s}(f,\mathcal{D}_n) = \int_a^b s_n\, d\lambda^1, \quad \mathscr{S}(f,\mathcal{D}_n) = \int_a^b S_n\, d\lambda^1.$$

Funkce $f$ je dle předpokladu omezená, tedy $|f| \le M$ pro nějaké $M \in \mathbb{R}$. Platí

$$-M \le s_1 \le s_2 \le \cdots \le f \le \cdots \le S_2 \le S_1 \le M.$$

Označme $f_1 := \lim_{n\to\infty} s_n$, $f_2 := \lim_{n\to\infty} S_n$ (monotónní omezená posloupnost vždy konverguje). Pak platí

$$-M \le s_n \nearrow f_1 \le f \le f_2 \swarrow S_n \le M.$$

a podle zobecněné Leviho věty tedy

$$\int_a^b s_n\, d\lambda^1 \to \int_a^b f_1\, d\lambda^1, \quad \int_a^b S_n\, d\lambda^1 \to \int_a^b f_2\, d\lambda^1.$$

Podle předpokladu ale také

$$\int_a^b s_n\, d\lambda^1 = \mathfrak{s}(f,\mathcal{D}_n) \nearrow (\mathrm{R})\int_a^b f \swarrow \mathscr{S}(f,\mathcal{D}_n) = \int_a^b S_n\, d\lambda^1,$$

takže $\int_a^b f_1\, d\lambda^1 = \int_a^b f_2\, d\lambda^1 = (\mathrm{R})\int_a^b f$. Podle důsledku Věty 6.1 je $f_1 = f_2$ s.v., a zřejmě tedy také $f = f_1$ s.v. (neboť $f_1 \le f \le f_2$), a tedy také $\int_a^b f\, d\lambda^1 = (\mathrm{R})\int_a^b f$. Měřitelnost $f$ plyne z měřitelnosti $f_1 = \lim s_n$ a z úplnosti prostoru s mírou. □

**Věta 6.4** *Buď $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená. Pak*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff f \textit{ je spojitá } \lambda^1\text{-s.v. na } [a,b].$$

[Bez důkazu; bude v navazující přednášce]

Uvažujme nyní obecný otevřený podinterval $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Je-li $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, symbolem $(\mathrm{N})\int_a^b f$ značíme *Newtonův* integrál z funkce $f$ (pokud konverguje, tedy existuje konečný):

$$(\mathrm{N})\int_a^b f = F(b_-) - F(a_+)$$

**Věta 6.5 (Vztah Lebesgueova a Newtonova integrálu)** *Nechť $f$ je nezáporná spojitá funkce na intervalu $(a,b)$. Potom* (N) $\int_a^b f$ *konverguje právě tehdy, když* $\int_a^b f\,d\lambda^1$ *konverguje.*

**Důkaz:** Uvažujme monotónní posloupnosti $a_i \searrow a$, $b_i \nearrow b$, $i \to \infty$, $a < a_i < b_i < b$. Nechť $F$ je primitivní funkce k funkci $f$ na intervalu $(a,b)$. Pak pro každé $i \in \mathbb{N}$,

$$(\mathrm{N}) \int_{a_i}^{b_i} f = F(b_i) - F(a_i) = (\mathrm{R}) \int_{a_i}^{b_i} f = \int_{a_i}^{b_i} f\,d\lambda^1$$

podle definice Newtonova integrálu, rovnosti Riemannova a Newtonova integrálu a Věty 6.3. Podle Leviho věty platí

$$\lim_{i\to\infty} \int_{a_i}^{b_i} f\,d\lambda^1 = \lim_{i\to\infty} \int_a^b (f \cdot \chi_{(a_i,b_i)})\,d\lambda^1 = \int_a^b f\,d\lambda^1.$$

Zároveň z definice Newtonova integrálu je

$$\lim_{i\to\infty} (\mathrm{N}) \int_{a_i}^{b_i} f = (\mathrm{N}) \int_a^b f,$$

právě tehdy, když posledně uvedený Newtonův integrál konverguje. Tím je ekvivalence dokázána. □

**Důsledek 6.6** *Buď $f$ spojitá funkce na intervalu $(a,b)$.*

1. *Jestliže konverguje* $\int_a^b f\,d\lambda^1$, *konverguje i* (N) $\int_a^b f$, *a to absolutně.*
2. *Jestliže* (N) $\int_a^b f$ *konverguje absolutně, pak konverguje i* $\int_a^b f\,d\lambda^1$.
3. *Pokud konverguje jak Lebesgueův, tak Newtonův integrál z funkce $f$, pak oba mají stejnou hodnotu.*
4. *Jestliže* (N) $\int_a^b f$ *konverguje neabsolutně, pak* $\int_a^b f\,d\lambda^1$ *nemá smysl.*