Teorie míry a integrálu 1

Pátá přednáška

2.11.2020

Věta o jednoznačnosti míry

Definice

Řekneme, že $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ je *Dynkinův systém*, jestliže

(i) $X \in \mathcal{D}$,

(ii) $D \in \mathcal{D} \implies X \setminus D \in \mathcal{D}$,

(iii) $D_n \in \mathcal{D}$, D_n po dvou disjunktní $\implies \bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$.

Věta o jednoznačnosti míry

Definice

Řekneme, že $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ je *Dynkinův systém*, jestliže

(i) $X \in \mathcal{D}$,

(ii) $D \in \mathcal{D} \implies X \setminus D \in \mathcal{D}$,

(iii) $D_n \in \mathcal{D}$, D_n po dvou disjunktní $\implies \bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$.

Poznámky

- Dynkinův systém je uzavřen i na vlastní množinové rozdíly: Jsou-li $A, B \in \mathcal{D}$, $A \subset B$, pak i $B \setminus A \in \mathcal{D}$.
- Každá σ-algebra je zřejmě Dynkinův systém, ale ne naopak.

δ-obal a σ-obal

Tvrzení

(a) *Průnik libovolného systému Dynkinových systémů je opět Dynkinův systém.*

(b) *Pro každý množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ existuje nejmenší Dynkinův systém, obsahující $\mathcal{S}$:*

$$\delta\mathcal{S} := \bigcap \{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X) \text{ Dynkinův syst.}, \mathcal{S} \subset \mathcal{D}\}.$$

δ-obal a σ-obal

Tvrzení

(a) *Průnik libovolného systému Dynkinových systémů je opět Dynkinův systém.*

(b) *Pro každý množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ existuje nejmenší Dynkinův systém, obsahující $\mathcal{S}$:*

$$\delta\mathcal{S} := \bigcap\{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X) \text{ Dynkinův syst.}, \mathcal{S} \subset \mathcal{D}\}.$$

Věta

Nechť je množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ uzavřen na konečné průniky. Pak $\delta\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$.

Věta

Nechť je množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ *uzavřen na konečné průniky a* μ, ν *nechť jsou dvě míry na* $\sigma\mathcal{S}$ *takové, že* $\mu(S) = \nu(S)$ *pro každou* $S \in \mathcal{S}$. *Nechť dále existují množiny* $A_n \in \mathcal{S}$ $(n \in \mathbb{N})$ *takové, že* $A_n \nearrow X$ *a* $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. *Pak* $\mu = \nu$ *na* $\sigma\mathcal{S}$.

Věta o jednoznačnosti míry

Věta

Nechť je množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ *uzavřen na konečné průniky a* μ, ν *nechť jsou dvě míry na* $\sigma\mathcal{S}$ *takové, že* $\mu(S) = \nu(S)$ *pro každou* $S \in \mathcal{S}$*. Nechť dále existují množiny* $A_n \in \mathcal{S}$ $(n \in \mathbb{N})$ *takové, že* $A_n \nearrow X$ *a* $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$*. Pak* $\mu = \nu$ *na* $\sigma\mathcal{S}$*.*

Důsledek

Je-li μ *míra na* $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ *taková, že* $\mu(I) =$ *délka*(I) *pro každý omezený interval* I*, pak nutně* $\mu = \lambda^1$*.*

Mějme dva prostory $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ se σ-konečnými měrami.

Definice

Měřitelným obdélníkem rozumíme množinu $A \times B \subset X \times Y$, kde $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$. σ-algebru

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma\{A \times B : \ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$$

nazýváme *součinovou σ-algebrou* na prostoru $X \times Y$.

Součin měr

Mějme dva prostory $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ se σ-konečnými měrami.

Definice

Měřitelným obdélníkem rozumíme množinu $A \times B \subset X \times Y$, kde $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$. σ-algebru

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma\{A \times B : \ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$$

nazýváme *součinovou σ-algebrou* na prostoru $X \times Y$.

Pro množinu $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ značíme

$$\begin{aligned} E_x &:= \{y \in Y : (x,y) \in E\}, \quad x \in X, \\ E^y &:= \{x \in X : (x,y) \in E\}, \quad y \in Y \end{aligned}$$

řezy množiny E.

Součin měr (2)

Tvrzení

Nechť $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Pak

1. $E_x \in \mathcal{B}$ *pro všechna* $x \in X$,
2. *funkce* $x \mapsto \nu(E_x)$ *je měřitelná na* $(X, \mathcal{A})$.

Součin měr (2)

Tvrzení

Nechť $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. *Pak*

1. $E_x \in \mathcal{B}$ *pro všechna* $x \in X$,
2. *funkce* $x \mapsto \nu(E_x)$ *je měřitelná na* $(X, \mathcal{A})$.

Věta (Existence a jednoznačnost součinové míry)

Existuje právě jedna míra $\mu \otimes \nu$ *na* $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ *s vlastností*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B), \quad A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}$$

(klademe $0 \cdot \infty = 0$*).*