Teorie míry a integrálu 1

Šestá přednáška

9.11.2020

Součinová míra - připomenutí

- $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ prostory se σ-konečnými měrami
- součinová σ-algebra:

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma\{A \times B : \ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$$

- součinová míra:

$$(\mu \otimes \nu)(E) := \int \nu(E_x)\, d\mu(x), \quad E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

Symetrie součinové míry

Definice (Obraz míry)

Buď $\varphi : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$ měřitelné zobrazení a μ míra na $(E, \mathcal{E})$. Pak množinová funkce

$$\mu\varphi^{-1} : B \mapsto \mu(\varphi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{F},$$

je míra na $(F, \mathcal{F})$ a nazýváme ji *obrazem míry* μ při zobrazení φ.

Symetrie součinové míry

Definice (Obraz míry)

Buď $\varphi : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$ měřitelné zobrazení a μ míra na $(E, \mathcal{E})$. Pak množinová funkce

$$\mu\varphi^{-1} : B \mapsto \mu(\varphi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{F},$$

je míra na $(F, \mathcal{F})$ a nazýváme ji *obrazem míry* μ při zobrazení φ.

Tvrzení (Symetrie součinové míry)

Platí $\nu \otimes \mu = (\mu \otimes \nu)\tau^{-1}$, kde $\tau : X \times Y \to Y \times X$ je záměna souřadnic, tedy $\tau : (x, y) \mapsto (y, x)$.

Fubiniova věta

Věta (Fubiniova věta)

Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes \nu)$ platí:

$$\int f \, d(\mu \otimes \nu)$$

$$= \int \left(\int f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Příklad

Uvažujme $X = Y = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $\mu = \nu$ je aritmetická míra. Definujme funkci $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ následovně:

$$f(z_1, z_2) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } z_2 = z_1 \geq 0 \text{ nebo } z_2 = z_1 - 1 \leq -1, \\ -1 & \text{pokud } z_2 = z_1 < 0 \text{ nebo } z_2 = z_1 - 1 > -1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Platí

$$\int \int f(z_1, z_2) d\mu(z_1)\, d\mu(z_2) = \sum_{z_2} \sum_{z_1} f(z_1, z_2) = 0,$$

ale

$$\int \int f(z_1, z_2) d\mu(z_2)\, d\mu(z_1) = \sum_{z_1} \sum_{z_2} f(z_1, z_2) = 2,$$

přitom ovšem $f \notin \mathcal{L}^*(\mu \otimes \mu)$.

Zúplněná součinová míra

Prostor se součinovou mírou $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ nemusí být úplný, ani když prostory $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ jsou úplné. Zúplněný prostor se součinovou mírou značíme $(X \times Y, \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}, \mu \hat{\otimes} \nu)$.

Zúplněná součinová míra

Prostor se součinovou mírou $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ nemusí být úplný, ani když prostory $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ jsou úplné. Zúplněný prostor se součinovou mírou značíme $(X \times Y, \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}, \mu \hat{\otimes} \nu)$.

Důsledek (Fubiniova věta pro zúplněnou součinovou míru)

Buďte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dva úplné prostory se σ-konečnými měrami. Pak pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mu \hat{\otimes} \nu)$ platí:

$$\int f \, d(\mu \hat{\otimes} \nu) = \int \left(\int f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Součin Lebesgueových měr

Věta

Pro $p, q \in \mathbb{N}$ platí:

(i) $\mathcal{B}^{p+q} = \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q$,

(ii) $\lambda^{p+q} = \lambda^p \otimes \lambda^q$.

Součin Lebesgueových měr

Věta

Pro $p, q \in \mathbb{N}$ platí:

(i) $\mathcal{B}^{p+q} = \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q$,

(ii) $\lambda^{p+q} = \lambda^p \otimes \lambda^q$.

Důsledek (Fubiniova věta v $\mathbb{R}^{p+q}$)

Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ platí

$$\int f(x,y)\,d(x,y) = \int \left(\int f(x,y)\,dy \right) dx = \int \left(\int f(x,y)\,dx \right) dy,$$

kde píšeme stručně $dx := d\lambda^p(x)$, $dy := d\lambda^q(y)$, $d(x,y) := d\lambda^{p+q}(x,y)$.

Fubiniova věta - důsledky

Důsledek

Pro množinu $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ *platí*

$$\lambda^{p+q}(A) = \int_{\pi_1 A} \lambda^q(A_x)\, dx = \int_{\pi_2 A} \lambda^p(A^y)\, dy,$$

kde $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$ *a* $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$ *jsou projekce.*

Fubiniova věta - důsledky

Důsledek

Pro množinu $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ platí

$$\lambda^{p+q}(A) = \int_{\pi_1 A} \lambda^q(A_x)\,dx = \int_{\pi_2 A} \lambda^p(A^y)\,dy,$$

kde $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$ a $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$ jsou projekce.

Důsledek

Pro funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ a množinu $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ platí

$$\int_A f(x, y)\,d(x, y) = \int_{\pi_1 A} \left(\int_{A_x} f(x, y)\,dy \right) dx = \int_{\pi_2 A} \left(\int_{A^y} f(x, y)\,dx \right) dy$$

Příklad

Pro jednotkovou kouli $B_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ v $\mathbb{R}^3$ dostáváme podle Důsledku 3

$$\lambda^3(B_1) = \int_{-1}^{1} \pi(1 - z^2)\, dz = \frac{4}{3}\pi.$$