7. přednáška, 16.11.2020

Teorie míry a integrálu 1

Sedmá přednáška

16.11.2020

7. přednáška, 16.11.2020

Věta o substituci

Připomenutí z analýzy: Pro funkci $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ a diferencovatelnou surjektivní monotónní funkci $\varphi : (a, b) \to (\alpha, \beta)$ platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\,dx = \int_\alpha^\beta f(y)\,dy,$$

má-li jedna strana smysl jako Newtonův integrál.

7. přednáška, 16.11.2020

Věta o substituci

Připomenutí z analýzy: Pro funkci $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ a diferencovatelnou surjektivní monotónní funkci $\varphi : (a, b) \to (\alpha, \beta)$ platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\, dx = \int_\alpha^\beta f(y)\, dy,$$

má-li jedna strana smysl jako Newtonův integrál.

Poznámka

Lebesgueova míra λ^n je translačně invariantní (tedy $\lambda^n(B+z) = \lambda^n(B)$ kdykoliv $B \in \mathcal{B}^n$ a $z \in \mathbb{R}^n$). To plyne z věty o jednoznačnosti míry, neboť λ^n a míra $\mu(B) := \lambda^n(B+z)$, $B \in \mathcal{B}^n$, se shodují na otevřených kvádrech.

7. přednáška, 16.11.2020

Lineární obraz Lebesgueovy míry

Tvrzení

Buď $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *regulární lineární zobrazení a* $A \in \mathcal{B}^n$. *Pak* $L(A) \in \mathcal{B}^n$ *a platí* $\lambda^n(L(A)) = |\det L|\lambda^n(A)$.

(platí i bez předpokladu regularity L.)

7. přednáška, 16.11.2020

Lineární obraz Lebesgueovy míry

Tvrzení

Buď $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ regulární lineární zobrazení a $A \in \mathcal{B}^n$. Pak $L(A) \in \mathcal{B}^n$ a platí $\lambda^n(L(A)) = |\det L|\lambda^n(A)$.

(platí i bez předpokladu regularity L.)

Důsledek (Lebesgueova míra je izometricky invariantní)

Je-li $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrie (tzn. $\|S(x) - S(y)\| = \|x - y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$), pak $\lambda^n(S(A)) = \lambda^n(A)$, $A \in \mathcal{B}^n$.

7. přednáška, 16.11.2020

Lineární obraz Lebesgueovy míry

Tvrzení

Buď $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ regulární lineární zobrazení a $A \in \mathcal{B}^n$. Pak $L(A) \in \mathcal{B}^n$ a platí $\lambda^n(L(A)) = |\det L|\lambda^n(A)$.

(platí i bez předpokladu regularity L.)

Důsledek (Lebesgueova míra je izometricky invariantní)

Je-li $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrie (tzn. $\|S(x) - S(y)\| = \|x - y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$), pak $\lambda^n(S(A)) = \lambda^n(A)$, $A \in \mathcal{B}^n$.

Důsledek

Je-li $W \subset \mathbb{R}^n$ afinní podprostor dimenze menší než n, platí $\lambda^n(W) = 0$.

7. přednáška, 16.11.2020

Lineární obraz Lebesgueovy míry

Tvrzení

Buď $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *regulární lineární zobrazení a* $A \in \mathcal{B}^n$*. Pak* $L(A) \in \mathcal{B}^n$ *a platí* $\lambda^n(L(A)) = |\det L|\lambda^n(A)$.

(platí i bez předpokladu regularity L.)

Důsledek (Lebesgueova míra je izometricky invariantní)

Je-li $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *izometrie (tzn.* $\|S(x) - S(y)\| = \|x - y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$*), pak* $\lambda^n(S(A)) = \lambda^n(A)$, $A \in \mathcal{B}^n$.

Důsledek

Je-li $W \subset \mathbb{R}^n$ *afinní podprostor dimenze menší než n, platí* $\lambda^n(W) = 0$.

Důsledek (Homogenita Lebesgueovy míry)

$$\lambda^n(rA) = |r|^n \lambda^n(A), \quad r \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{B}^n.$$

7. přednáška, 16.11.2020

Definice

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : U \to \mathbb{R}^n$ zobrazení třídy C^1. Pak $\mathcal{J}f(x) := \det Df(x)$ je *Jakobián funkce f v bodě x*, $x \in U$.

7. přednáška, 16.11.2020

Definice

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : U \to \mathbb{R}^n$ zobrazení třídy C^1. Pak $\mathcal{J}f(x) := \det Df(x)$ je *Jakobián funkce f v bodě x*, $x \in U$.

Definice

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Zobrazení $f : U \to \mathbb{R}^n$ je *difeomorfismus*, je-li prosté, třídy C^1 a platí-li $\mathcal{J}f(x) \neq 0$, $x \in U$.

7. přednáška, 16.11.2020

Definice

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : U \to \mathbb{R}^n$ zobrazení třídy C^1. Pak $\mathcal{J}f(x) := \det Df(x)$ je *Jakobián funkce f v bodě x*, $x \in U$.

Definice

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Zobrazení $f : U \to \mathbb{R}^n$ je *difeomorfismus*, je-li prosté, třídy C^1 a platí-li $\mathcal{J}f(x) \neq 0$, $x \in U$.

Poznámka

Z věty o inverzním zobrazení plyne, že je-li $f : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus, je obraz $f(U)$ otevřená množina a f^{-1} je třídy C^1 na $f(U)$.

7. přednáška, 16.11.2020

Věta o substituci

Věta

Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus a $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ Lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak

$$\int_U f(\varphi(x))\,|\mathcal{J}\varphi(x)|\,dx = \int_{\varphi(U)} f(y)\,dy,$$

má-li jedna strana smysl.

7. přednáška, 16.11.2020

Věta o substituci

Věta

Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ *otevřená,* $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ *difeomorfismus a* $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ *Lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

$$\int_U f(\varphi(x)) \, |\mathcal{J}\varphi(x)| \, dx = \int_{\varphi(U)} f(y) \, dy,$$

má-li jedna strana smysl.

Důsledek

Je-li navíc $B \subset \varphi(U)$ *Lebesgueovsky měřitelná množina, platí*

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(x)) \, |\mathcal{J}\varphi(x)| \, dx = \int_B f(y) \, dy,$$

má-li jedna strana smysl.

7. přednáška, 16.11.2020

Příklad - polární souřadnice v rovině

Zobrazení $\varphi : (r, t) \mapsto (r \cos t, r \sin t)$ je difeomorfismus na $U = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$, $\mathcal{J}\varphi(r, t) = r$ a platí $\lambda^2(\mathbb{R}^2 \setminus \varphi(U)) = 0$, proto

$$\lambda^2(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} r \, d(r, t), \quad B \in \mathcal{B}_0^2.$$