9. přednáška, 30.11.2020

Teorie míry a integrálu 1

Devátá přednáška

30.11.2020

9. přednáška, 30.11.2020

Konvergence v L^p

Věta

Nechť $\mu(X) < \infty$ *a* $1 \leq p < q \leq \infty$. *Pak* $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ *a pro* $f_n, f \in L^q(\mu)$ *platí:*

$$f_n \xrightarrow{L^q} f \implies f_n \xrightarrow{L^p} f.$$

9. přednáška, 30.11.2020

Konvergence v L^p

Věta

Nechť $\mu(X) < \infty$ *a* $1 \leq p < q \leq \infty$. *Pak* $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ *a pro* $f_n, f \in L^q(\mu)$ *platí:*

$$f_n \xrightarrow{L^q} f \implies f_n \xrightarrow{L^p} f.$$

Příklad

$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ *leží v* $L^1(0,1)$, *ale nikoliv v* $L^2(0,1)$. *Funkce* $f(x) = x^{-1}$ *leží v* $L^2(1,\infty)$, *ale nikoliv v* $L^1(1,\infty)$.

9. přednáška, 30.11.2020

Tvrzení

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mírou a* $f \geq 0$ *měřitelná funkce na* X. *Pak předpis*

$$\nu : A \mapsto \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

definuje míru na $(X, \mathcal{A})$ *a pro každou měřitelnou funkci* g *na* X *platí*

$$\int g \, d\nu = \int g \cdot f \, d\mu,$$

má-li jedna strana smysl.

9. přednáška, 30.11.2020

Tvrzení

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mírou a* $f \geq 0$ *měřitelná funkce na* X. *Pak předpis*

$$\nu : A \mapsto \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

definuje míru na $(X, \mathcal{A})$ *a pro každou měřitelnou funkci* g *na* X *platí*

$$\int g \, d\nu = \int g \cdot f \, d\mu,$$

má-li jedna strana smysl.

Poznámka

Zřejmě platí: $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$, $A \in \mathcal{A}$.

9. přednáška, 30.11.2020

Absolutní spojitost měr

Definice

Buďte μ, ν *dvě míry na* $(X, \mathcal{A})$. *Řekneme, že míra* ν *je absolutně spojitá vzhledem k míře* μ *(píšeme* $\nu \ll \mu$*), jestliže*

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0, \quad A \in \mathcal{A}.$$

9. přednáška, 30.11.2020

Absolutní spojitost měr

Definice

Buďte μ, ν dvě míry na $(X, \mathcal{A})$. Řekneme, že míra ν je absolutně spojitá vzhledem k míře μ (píšeme $\nu \ll \mu$), jestliže

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Tvrzení

Buďte μ, ν dvě konečné míry na $(X, \mathcal{A})$. Pak $\nu \ll \mu$ právě tehdy, když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall A \in \mathcal{A}) : \mu(A) < \delta \implies \nu(A) < \varepsilon.$$

9. přednáška, 30.11.2020

Radon-Nikodymova věta

Věta (Radon-Nikodym)

Buďte μ, ν dvě σ-konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že $\nu \ll \mu$. Pak existuje nezáporná měřitelná funkce f na X taková, že

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

9. přednáška, 30.11.2020

Radon-Nikodymova věta

Věta (Radon-Nikodym)

Buďte μ, ν dvě σ-konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že $\nu \ll \mu$. Pak existuje nezáporná měřitelná funkce f na X taková, že

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Definice

Funkci f z předchozí věty nazýváme (Radon-Nikodymovou) hustotou míry ν vyhledem k μ a píšeme

$$f(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x), \quad x \in X.$$

9. přednáška, 30.11.2020

Důkaz R.-N. věty

Tvrzení

Buďte μ, ν *dvě konečné míry na* $(X, \mathcal{A})$ *takové, že* $\nu(A) \leq \mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$. *Pak existuje měřitelná funkce* f *na* X *splňující* $0 \leq f \leq 1$ μ*-s.v. a*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Poznámka

Hustota $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ *je určena jednoznačně modulo ekvivalence* $\sim$.