Přednáška 14.12.2020

14 Distribuční funkce

Definice 14.1 Buď μ konečná borelovská míra na $\mathbb{R}$. Pak

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

je *distribuční funkce* míry μ.

Tvrzení 14.1 (1) *F_μ je neklesající,*

(2) *$F(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) = 0$, $F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F_\mu(x) < \infty$,*

(3) *F_μ je zprava spojitá.*

Důkaz: Tvrzení snadno plyne z monotonie a spojitosti míry. □

Věta 14.2 *Nechť funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má vlastnosti (1), (2) a (3). Pak existuje právě jedna konečná borelovská míra μ na $\mathbb{R}$ taková, že $F_\mu = F$.*

Důkaz: Buď $\mathcal{A}_0$ algebra generovaná intervaly $(a, b]$, (a, ∞), $a \in [-\infty, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$. Každou množinu $A \in \mathcal{A}_0$ můžeme vyjádřit jako disjunktní konečné sjednocení $A = \bigcup_{i=1}^k (a_i, b_i]$ a definujeme množinovou funkci na $\mathcal{A}_0$ předpisem

$$\tilde{\mu}(A) := \sum_{i=1}^k (F(b_i) - F(a_i)).$$

Snadno lze ověřit, že $\tilde{\mu}$ je korektně definovaná a konečně aditivní na $\mathcal{A}_0$. Ukážeme, že $\tilde{\mu}$ je pramíra. K tomu stačí ukázat spojitost v prázdné množině. Nechť tedy $A_n \in \mathcal{A}_0$, $A_n \searrow \emptyset$, a buď $\varepsilon > 0$ dáno. Protože F má konečné limity v $-\infty$ a ∞, existuje $M > 0$ takové, že

$$F(-M) + (F(\infty) - F(M)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

a tedy omezené množiny $B_n := A_n \cap (-M, M] \in \mathcal{A}_0$ splňují

$$\tilde{\mu}(B_n) \geq \tilde{\mu}(A_n) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vyjádřeme B_n ve tvaru disjunktního sjednocení $B_n := \bigcup_{i=1}^{k_n} (a_i^n, b_i^n]$ (zde $a_i^n, b_i^n \in \mathbb{R}$). Protože F je zprava spojitá, existuje $\delta_n > 0$ takové, že pro množinu $C_n := \bigcup_{i=1}^{k_n} (a_i^n + \delta_n, b_i^n]$ platí

$$\tilde{\mu}(B_n \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Množiny $K_n := \overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_n}$ jsou kompaktní a splňují

$$K_n \searrow \bigcap_{i=1}^\infty \overline{C_i} \subset \bigcap_{i=1}^\infty A_i = \emptyset,$$

tedy existuje n, pro něž je $K_n = \emptyset$, a tedy i $C_1 \cap \cdots \cap C_n = \emptyset$. Pak platí

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(B_n) &= \tilde{\mu}\left(B_n \setminus \bigcap_{i=1}^{n} C_i\right) \\
&= \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(B_n \setminus C_i)\right) \\
&\le \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(B_i \setminus C_i)\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mu}(B_i \setminus C_i) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Celkem tedy máme $\tilde{\mu}(A_n) < \varepsilon$, a protože ε bylo zvoleno libovolně malé, dokázali jsme, že $\tilde{\mu}(A_n) \searrow 0$. $\tilde{\mu}$ je tedy konečná pramíra na $\mathcal{A}_0$ a podle Hahn-Kolmogorovovy věty existuje právě jedno rozšíření na míru μ na $\sigma\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

Příklady:

1. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1 & x \ge a, \end{cases}$ je distribuční funkce Diracovy míry δ_a.

2. Jsou-li $-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_k < \infty$ a $t_1, \ldots, t_k > 0$, pak

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1, \\ t_1 + \cdots + t_i, & x \in [a_i, a_{i+1}),\ i = 1, \ldots, k-1, \\ t_1 + \cdots + t_k, & x \ge a_k, \end{cases}$$

   je distribuční funkce míry $\mu = t_1\delta_{a_1} + \cdots + t_k\delta_{a_k}$.

3. Je-li $f \in L^1(\lambda)$, $f \ge 0$, pak

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

   je distribuční funkce míry $\mu(B) = \int_B f(t)\,dt$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definice 14.2 Konečná borelovská míry μ na $\mathbb{R}$ je

- *diskrétní*, jestliže existuje spočetná množina $S \subset \mathbb{R}$ taková, že $\mu(\mathbb{R}\setminus S) = 0$;
- *neatomická*, jestliže $\mu(\{x\}) = 0$ pro každý $x \in \mathbb{R}$.

Cvičení:

1. Je-li μ zároveň diskrétní a neatomická, je nulová.
2. Každá diskrétní míra je tvaru $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} t_i\delta_{a_i}$ pro nějaké $t_i \ge 0$ a $a_i \in \mathbb{R}$, $\sum_i t_i < \infty$.
3. μ je neatomická $\iff$ F je spojitá.

Příklad: Cantorova funkce Položme $C_0 = [0,1]$ a indukcí definujme množiny

$$C_n = \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

(platí $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$ a C_n jsou neprázdné kompaktní). Množina

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

se nazývá *Cantorovo diskontinuum.* Platí:

- $\lambda^1(C) = 0$,
- Číslo $x \in [0,1]$ patří do C právě tehdy, když je lze vyjádřit ve trojkovém rozvoji $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j}$ s pomocí číslic $x_j \in \{0,2\}$, $j = 1, 2, \dots$.

Buď $C \subset [0,1]$ Cantorovo diskontinuum. *Cantorovu funkci F_C* definujeme následovně. Klademe $F_C(x) = 0$ pro $x \leq 0$ a $F_C(x) = 1$ pro $x \geq 1$. Dále $x \in (0,1)$ vyjádříme v trojkovém rozvoji

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j} \quad (x_j \in \{0,1,2\}),$$

označíme $n(x) := \inf\{j \in \mathbb{N} : x_j = 1\}$ a klademe

$$F_C(x) := \sum_{j=1}^{n(x)} \frac{\min\{x_j, 1\}}{2^j}, \quad x \in (0,1).$$

(Je třeba ověřit, že hodnota $F_C(x)$ je korektně, tedy jednoznačně určená, i když x nemá jednoznačný rozvoj v trojkové soustavě!)

Funkce F_C je spojitá, neklesající a je distribuční funkcí *Cantorovy míry μ_C*, která je neatomická, ale přitom je singulární vzhledem k Lebesgueově míře.

Ukažme nejprve monotonii F_C. Buďte $0 \leq x < y \leq 1$, $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 3^{-j}$, $y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j 3^{-j}$, a nechť $x_j = y_j$ pro $1 \leq j < j_0$ a $x_{j_0} < y_{j_0}$. Pokud $x_j = y_j = 1$ pro některé $j < j_0$, pak zřejmě $F_C(x) = F_C(y)$. Nechť naopak $n(x), n(y) \geq j_0$, a označme $q := \sum_{j=1}^{j_0-1} 2^{-j} \min\{1, x_j\}$. Je-li $x_{j_0} = 0$, a tedy $y_{j_0} = 1$ nebo 2, pak $F_C(x) \leq q + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{-j} = q + 2^{-j_0} \leq F_C(y)$. Pokud $x_{j_0} = 1$ a $y_{j_0} = 2$, pak $F_C(x) = q + 2^{-j_0} \leq F_C(y)$. Tím je ověřeno, že F_C je neklesající.

Nyní ukážeme spojitost F_C. Pokud $x, y \in [0,1]$ náleží témuž triadickému intervalu $[k3^{-j}, (k+1)3^{-j}]$, pak $|F_C(y) - F_C(x)| \leq 2^{-j}$. Platí-li $|x - y| \leq 3^{-j}$ pak x, y patří do téhož nebo do dvou sousedních triadických intervalů délky 3^{-j}, a tedy $|F_C(y) - F_C(x)| \leq 2^{-j+1}$. Tedy F je (stejnoměrně) spojitá.

Konečně ukážeme, že $\mu_C([0,1] \setminus C = 0$. Množinu $[0,1] \setminus C$ lze zapsat jako spočetné sjednocení otevřených triadických intervalů, které lze popsat v triadickém rozvoji jako množina posloupností, které mají (nutně) na daném j-tém místě jedničku, a předtím pouze nuly a dvojky. Na takových intervalech je ale funkce F_C z definice konstantní, tedy míra F_C těchto intervalů, i jejich sjednocení, je nulová.

Pozn.: Každou konečnou borelovskou míru μ na $\mathbb{R}$ lze rozložit na součet

$$\mu = \mu_a + \mu_c + \mu_d,$$

kde $\mu_a \ll \lambda$, μ_d je diskrétní a μ_c neatomická s vlastností $\mu_c \perp \lambda$.