Přednáška 14.12.2020

Pozn.: Každou konečnou borelovskou míru μ na $\mathbb{R}$ lze rozložit na součet

$$\mu = \mu_a + \mu_c + \mu_d,$$

kde $\mu_a \ll \lambda$, μ_d je diskrétní a μ_c neatomická s vlastností $\mu_c \perp \lambda$.

Tvrzení 14.3 *Nechť distribuční funkce F konečné míry μ má všude vlastní derivaci $F' =: f$. Pak $\mu \ll \lambda$ a $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$.*

Důkaz: Označme $\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}^1 : \mu(B) = \int_B f(x)\,dx\}$. Z vlastnosti

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

plyne, že $\mathcal{D}$ obsahuje všechny intervaly typu $(a,b]$. Protože systém těchto intervalů je uzavřen na konečné průniky a generuje borelovskou σ-algebru, a protože $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém, je $\mathcal{D} = \mathcal{B}^1$, a tedy f je Radon-Nikodymova hustota μ vzhledem k λ^1. □

Pozn.:

1. Podmínka existence derivace distribuční funkce všude není nutná pro absolutní spojitost (vzhledem k λ). Např.

   $$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

   je distribuční funkcí absolutně spojité míry $\mu(\cdot) = \lambda(\cdot \cap (0,1))$.

2. Každá monotónní funkce, a tedy i každá distribuční funkce, má derivaci v λ-skoro všech bodech.

3. Nutnou a postačující podmínkou pro absolutní spojitost $\mu \ll \lambda$ je *absolutní spojitost* distribuční funkce F: pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x_1 < y_1 < \cdots < x_n < y_n$ platí

   $$\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) < \delta \implies \sum_{i=1}^{n} |F(y_i) - F(x_i)| < \varepsilon.$$

   K důkazu slouží Tvrzení 12.2 (které platí i bez předpokladu konečnosti referenční míry μ). Je-li distribuční funkce F absolutně spojitá, pak podmínka z Tvrzení 12.2 je splněna pro všechny množiny z algebry $\mathcal{A}_0$ generované intervaly typu $(a,b]$, je ale potřeba ukázat, že platí pro všechny borelovské množiny.

Definice 14.3 (Lebesgue-Stieltjesův integrál) Je-li F distribuční funkce konečné míry μ a $f \in L^1(\mu)$, píšeme

$$\int f(x)\, dF(x) := \int f(x)\, d\mu(x).$$

Je-li navíc $a < b$, značíme

$$\int_a^b f(x)\, dF(x) := \int_{(a,b]} f(x)\, d\mu(x).$$

Věta 14.4 (Per partes pro Lebesgue-Stieltjesův integrál) *Jsou-li F, G dvě distribuční funkce a $a < b$, platí*

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b F(x_-)\, dG(x) + \int_a^b G(x)\, dF(x),$$

kde $F(x_-) := \lim_{y \to x_-} F(y)$.

Důkaz: S využitím Fubiniho věty dostaneme

$$\begin{aligned}
(F(b) - F(a))(G(b) - G(a)) &= \int_{(a,b]^2} d(\mu_F \otimes \mu_G) \\
&= \int_a^b \int_a^b \chi_{\{x<y\}}\, dF(x)\, dG(y) + \int_a^b \int_a^b \chi_{\{x \geq y\}}\, dG(y)\, dF(x) \\
&= \int_a^b \int_{(a,y)} dF(x)\, dG(y) + \int_a^b \int_a^x dG(y)\, dF(x) \\
&= \int_a^b (F(y_-) - F(a))\, dG(y) + \int_a^b (G(x) - G(a))\, dF(x) \\
&= \int_a^b F(x_-)\, dG(x) + \int_a^b G(x)\, dF(x) - F(a)(G(b) - G(a)) - G(a)(F(b) - F(a)),
\end{aligned}$$

a odečtením dostaneme dokazovanou rovnost. □

Příklady:

1. Mají-li F i G derivaci na $\mathbb{R}$, dostaneme z věty 14.4 a tvrzení 14.3

$$[FG]_a^b = \int_a^b F(x)G'(x)\, dx + \int_a^b F'(x)G(x)\, dx,$$

   což je klasický vzorec per partes.

2. Pro Cantorovu funkci F_C platí symetrie $F_C(1-x) = 1 - F_C(x)$, $x \in (0,1)$, z čehož snadno dostaneme $\int_0^1 F_C(x)\, dx = \frac{1}{2}$. Použitím vzorce per partes pak dostaneme

$$1 = \int_0^1 x\, dF_C(x) + \int_0^1 F_C(x)\, dx,$$

   tedy $\int_0^1 x\, dF_C(x) = \frac{1}{2}$.