Přednáška 12.10.2020

3 Měřitelné funkce

Věta 3.1 *Uvažujme zobrazení $f : X \to Y$.*

(i) *Je-li $\mathcal{B}$ σ-algebra na Y, pak $f^{-1}\mathcal{B} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ je σ-algebra na X.*

(ii) *Pro libovolný množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ platí $\sigma(f^{-1}\mathcal{S}) = f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$.*

Důkaz: (i) se snadno dokáže s využitím faktu, že vzor množiny komutuje s množinovými operacemi. Konkrétně platí $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ a $\bigcup_i f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\bigcup_i B_i)$, kdykoliv $B, B_1, B_2, \dots \subset Y$.

(ii). Zřejmě $f^{-1}\mathcal{S} \subset f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$, a tedy $\sigma(f^{-1}\mathcal{S}) \subset \sigma(f^{-1}(\sigma\mathcal{S})) = f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$, protože $f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$ je σ-algebra podle části (i). Pro důkaz opačné inkluze označme množinový systém

$$\mathcal{A} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}\mathcal{S})\}.$$

Je snadné ověřit, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra. Dále zřejmě $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, a tedy také $\sigma\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, tudíž $f^{-1}(\sigma\mathcal{S}) \subset f^{-1}\mathcal{A} \subset \sigma(f^{-1}\mathcal{S})$, kde poslední inkluze plyne přímo z definice systému $\mathcal{A}$. $\square$

Definice 3.1 Buďte $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{B})$ měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ je *měřitelné* (vzhledem k $\mathcal{A}, \mathcal{B}$), jestliže $f^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Píšeme pak $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$. Je-li některý z prostorů X, Y metrickým prostorem, pak za příslušnou σ-algebru bereme borelovskou σ-algebru. Měřitelné zobrazení mezi dvěma metrickými prostory nazýváme *borelovsky měřitelné* nebo stručně *borelovské.*

Pozn.:

1. Složení dvou měřitelných zobrazení je zřejmě měřitelné.
2. Jsou-li $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{B})$ měřitelné prostory a $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ libovolný generátor σ-algebry $\mathcal{B}$ (tzn. platí-li $\sigma\mathcal{S} = \mathcal{B}$), pak $f : X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$. (Plyne z Věty 3.1.)
3. Je-li $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor a Y metrický prostor, pak zobrazení $f : X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ pro každou otevřenou množinu $G \subset Y$.

Tvrzení 3.2 *Každé spojité zobrazení mezi dvěma metrickými prostory je borelovsky měřitelné.*

Důkaz: Plyne přímo z předchozí poznámky a z faktu, že f je spojité právě tehdy, když vzory otevřených množin jsou otevřené. $\square$

Věta 3.3 *Borelovská σ-algebra $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ je generovaná*

1. *otevřenými kvádry (tj. množinami $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \ldots, n$;*
2. *systémem $\mathcal{S} = \{(-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$.*

Speciálně, $\mathcal{B}^1 = \sigma\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

Důkaz: 1. Plyne přímo z faktu, že každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako spočetné sjednocení otevřených kvádrů. Skutečně, označíme-li symbolem $\mathcal{Q}$ systém všech otevřených kvádrů v $\mathbb{R}^n$ s racionálními krajními body, pak lze psát

$$G = \bigcup \{I \in \mathcal{Q} : I \subset G\}.$$

K ověření vlastnosti 2. stačí ukázat, že každý otevřený kvádr leží v $\sigma\mathcal{S}$. Ověříme tuto vlastnost v $\mathbb{R}^2$ (případ obecné dimenze je zcela analogický). Pro otevřený kvádr $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ můžeme psát

$$I = ((-\infty, b_1) \times (-\infty, b_2)) \setminus ((-\infty, a_1] \times (-\infty, b_2)) \setminus ((-\infty, b_1) \times (-\infty, a_2]),$$

přitom

$$(-\infty, a_1] \times (-\infty, b_2) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (-\infty, a_1 + k^{-1}) \times (-\infty, b_2) \in \sigma\mathcal{S},$$

a analogicky pro $(-\infty, b_1) \times (-\infty, a_2]$. $\square$

Pozn.: Jako generátor $\mathcal{B}^n$ lze vzít rovněž uzavřené či polouzavřené kvádry. Navíc stačí vzít pouze kvádry s racionálními koncovými body.

Věta 3.4

1. *Jsou-li $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ a $g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^m$ měřitelná zobrazení, pak i $(f, g) : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^{n+m}$ je měřitelné.*
2. *Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ měřitelná, jsou i $f + g$ a $f - g$ měřitelná.*
3. *Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, jsou i $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ měřitelné.*

Důkaz: 1. Každý otevřený kvádr $I \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je tvaru $I = U \times V$, kde $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené kvádry. Pak platí

$$(f, g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \in \mathcal{A},$$

a tedy (f, g) je měřitelné podle Věty 3.3.

2. Měřitelnost $f+g$ plyne z toho, že součet funkcí můžeme psát jako složení

$$f + g = + \circ (f, g),$$

kde $+ : (x,y) \mapsto x+y$ je operace sčítání v $\mathbb{R}^n$ a $(f,g)(x) = (f(x), g(x))$ je spojení zobrazení z prvního tvrzení. Měřitelnost složení pak plyne z měřitelnosti obou komponent. Měřitelnost zbývajících zobrazení (funkcí) se ukáže analogicky. $\square$

Důsledek 3.5 *Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, pak leží množiny $\{f \le g\}$, $\{f < g\}$ a $\{f = g\}$ v σ-algebře $\mathcal{A}$.*

Budeme značit $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $\mathcal{B}^* := \sigma(\mathcal{B}^1 \cup \{\{-\infty\}, \{\infty\}\})$. $\mathcal{B}^*$ je rovněž generována intervaly a předchozí tvrzení pro reálné měřitelné funkce platí i pro "numerické" měřitelné funkce s hodnotami v $\mathbb{R}^*$.

Věta 3.6 *Buďte $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelné, $n \in \mathbb{N}$. Pak jsou funkce $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ a $\liminf_{n\to\infty} f_n$ rovněž měřitelné.*

Důkaz: Označme $g := \sup_n f_n$. Pak pro libovolné $b \in \mathbb{R}^*$ platí

$$g^{-1}([-\infty, b]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \le b\} \in \mathcal{A},$$

tedy g je měřitelná, neboť intervaly $[-\infty, b]$: $b \in \mathbb{R}^*$ generují $\mathcal{B}^*$. Dále označme $h := \limsup_{n\to\infty} f_n$. Pak pro libovolné $b \in \mathbb{R}^*$ platí

$$\begin{aligned} h^{-1}([-\infty, b]) &= \{x \in X : (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \ge n_0) : f_n(x) \le b + \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \{f_n \le b + \frac{1}{k}\} \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

tedy i h je měřitelná. Případ infima a liminf je analogický. $\square$

Pozn.: Z předchozí věty plyne, že limita měřitelných funkcí je měřitelná, pokud existuje.

Definice 3.2 Funkce $s : X \to [0, \infty)$ je *jednoduchá*, jestliže $s(X)$ je konečná množina.

Věta 3.7 *Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ měřitelná, existují funkce $s_n : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty)$ jednoduché měřitelné takové, že $s_n \nearrow f$ $(n \to \infty)$.*

Důkaz: Položme

$$s_n(x) := \max\left\{\frac{k}{2^n} : \frac{k}{2^n} \le f(x),\, k = 0, 1, \ldots, n2^n\right\}, \quad x \in X.$$

Není těžké ověřit, že s_n jsou jednoduché měřitelné funkce a že $s_n \nearrow f$. $\square$