Přednáška 19.10.2020

4 Abstraktní Lebesgueův integrál

Pro podmnožinu $E \subset X$ značíme symbolem χ_E *indikátorovou funkci* množiny E, tedy

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E. \end{cases}.$$

Definice 4.1 Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

(a) Je-li $s : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty)$ jednoduchá měřitelná v *kanonickém tvaru* $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}$ (tedy $\alpha_j \geq 0$, $E_j = \{x \in X : s(x) = \alpha_j\} \in \mathcal{A}$), klademe

$$\int_X s \, d\mu = \int_X s(x) \, d\mu(x) := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(E_j).$$

(Je-li některé $\alpha_j = 0$, klademe $\alpha_j \mu(E_j) = 0$, tedy používáme konvenci $0 \cdot \infty = 0$.)

(b) Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ měřitelná, klademe

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X s \, d\mu : 0 \leq s \leq f, \, s \text{ jedn. měř.} \right\}.$$

(c) Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelná, klademe

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu,$$

má-li rozdíl smysl. (Zde f^+, f^- značí kladnou, resp. zápornou část funkce f.)

Pozn.:

1. Je-li f měřitelná a $E \in \mathcal{A}$, značíme

$$\int_E f \, d\mu := \int_X (f \cdot \chi_E) \, d\mu.$$

Místo $\int_X f \, d\mu$ píšeme také pouze $\int f \, d\mu$.

2. Je-li f měřitelná taková, že $\int f^+ \, d\mu = \int f^- \, d\mu = \infty$, pak $\int f \, d\mu$ není definován. Říkáme proto, že (abstraktní) Lebesgueův integrál je *absolutně konvergentní* (na rozdíl od Newtonova integrálu).

Tvrzení 4.1 (Monotonie integrálu) *Pro $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelné s vlastností $0 \leq f \leq g$ platí $0 \leq \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.*

Věta 4.2 (Leviho věta) *Jsou-li f_n nezáporné měřitelné funkce na X takové, že $f_n \nearrow f$, platí $\int_X f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$ $(n \to \infty)$.*

Důkaz: Označme $a_n := \int f_n \, d\mu \in [0, \infty]$, $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ (posloupnost (a_n) je neklesající podle předchozího tvrzení). Zřejmě platí nerovnost $a \leq \int f \, d\mu$. Ukážeme, že také $a \geq \int f \, d\mu$.

Je-li $a = \infty$, nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy dále, že $a < \infty$. Ukážeme, že $a \geq \int s \, d\mu$ pro každou jednoduchou měřitelnou funkci $s \leq f$. Pak bude i $a \geq \int f \, d\mu$ podle definice integrálu.

Buď tedy $0 \leq s \leq f$ jednoduchá měřitelná funkce. Zvolme $0 < \tau < 1$ a označme

$$E_n := \{x \in X : f_n(x) \geq \tau s(x)\}.$$

Zřejmě $E_n \in \mathcal{A}$, $E_n \subset E_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, a $\bigcup_n E_n = X$. Podle věty o spojitosti míry platí

$$\mu(A \cap E_n) \nearrow \mu(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Zapišme s ve tvaru $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$, kde $X = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ je rozklad prostoru X. Pak platí

$$\begin{aligned}
\int_X f_n \, d\mu &\geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} (\tau s) \, d\mu = \int (\tau s \chi_{E_n}) \, d\mu \\
&= \tau \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(A_j \cap E_n) \to \tau \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(A_j) = \tau \int s \, d\mu, \quad n \to \infty,
\end{aligned}$$

a tedy

$$a = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geq \tau \int s \, d\mu.$$

Protože nerovnost platí pro libovolné $\tau \in (0, 1)$, platí i $a \geq \int s \, d\mu$, a důkaz je hotov. □

Věta 4.3 (Fatouovo lemma) *Pro funkce f_n nezáporné měřitelné na X platí*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Důkaz: Označme $g_n(x) := \inf\{f_k(x) : k \geq n\}$, $x \in X$. Funkce g_n jsou měřitelné (Věta 3.6) a platí $g_n \nearrow g := \liminf_{n\to\infty} f_n$ (z definice lim inf). Podle Leviho věty platí $\int g_n \, d\mu \nearrow \int g \, d\mu$. Dále zřejmě $g_n \leq f_n$, a tedy $\int g_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu$, $n \in \mathbb{N}$, a limitním přechodem dostaneme $\int g \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$. □

Definice 4.2 Označme

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^*(\mu) &:= \left\{ f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^* \text{ měř.} : \int f \, d\mu \text{ je definován} \right\}, \\
\mathcal{L}^1(\mu) &:= \left\{ f \in \mathcal{L}^*(\mu) : \int |f| \, d\mu < \infty \right\}.
\end{aligned}$$

Věta 4.4 (Linearita integrálu) *Jsou-li funkce $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak platí*

$$\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu, \qquad \int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu,$$

má-li pravá strana smysl.

Pozn.: Zobecněný Lebesgueův integrál je tedy lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Důkaz: (i) Je-li $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ pak i $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int (\alpha f) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$ (cvičení).

(ii) Buďte f, g nezáporné jednoduché měřitelné, v kanonickém vyjádření $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{E_i}$, $g = \sum_{j=1}^l \beta_j \chi_{F_j}$. Pak jejich součet můžeme zapsat jako

$$f + g = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (\alpha_i + \beta_j) \chi_{E_i \cap F_j},$$

což je zřejmě opět jednoduchá měřitelná funkce. Její vyjádření výše nemusí být kanonický tvar, ale sloučíme-li dvojice indexů (i, j), pro něž je $\alpha_i + \beta_j$ stejné, dostaneme kanonický tvar, a zřejmě podle definice je tedy

$$\int (f+g) \, d\mu = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (\alpha_i + \beta_j) \mu(E_i \cap F_j).$$

Z aditivity míry dostaneme $\mu(E_i) = \sum_{j=1}^l \mu(E_i \cap F_j)$, $i = 1, \dots, k$, a podobně $\mu(F_j) = \sum_{i=1}^{\mu} (E_i \cap F_j)$, $j = 1, \dots, l$, a proto také podle definice

$$\int f \, d\mu + \int g \, d\mu = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (\alpha_i + \beta_j) \mu(E_i \cap F_j) = \int (f+g) \, d\mu.$$

(iii) Jsou li f, g nezáporné měřitelné, pak podle Věty 3.7 existují jednoduché měřitelné funkce s_n, t_n takové, že $s_n \nearrow f$ a $t_n \nearrow g$, tedy $\int s_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$ a $\int t_n \, d\mu \nearrow \int g \, d\mu$ podle Leviho věty. Ze stejného důvodu platí i $\int (s_n + t_n) \, d\mu \nearrow \int (f+g) \, d\mu$. Víme již, že $\int (s_n + t_n) \, d\mu = \int s_n \, d\mu + \int t_n \, d\mu$, a limitním přechodem $(n \to \infty)$ dostaneme požadovanou rovnost.

(iv) Buďte nyní $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ libovolné. Platí

$$f + g = (f+g)^+ - (f+g)^- = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-),$$

tedy $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. Všechny zde vystupující funkce jsou nezáporné, tudíž platí

$$\int (f+g)^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu + \int g^- \, d\mu = \int (f+g)^- \, d\mu + \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu.$$

Aby měl součet integrálů $\int f\,d\mu + \int g\,d\mu$ smysl, musí být buď $\int f^+\,d\mu < \infty$ a $\int g^+\,d\mu < \infty$, nebo $\int f^-\,d\mu < \infty$ a $\int g^-\,d\mu < \infty$. Uvažujme druhou z uvedených variant. Pak z nerovnosti $(f+g)^- \le f^- + g^-$ plyne $\int (f^- + g^-)\,d\mu < \infty$ a odečtením všech integrálů ze záporných části ve výše uvedené rovnosti dostaneme požadovaný vztah $\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$. V případě platnosti první varianty odečteme naopak integrály z kladných částí. □

Důsledek 4.5 *Pro nezáporné měřitelné funkce f_n na X platí*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Důkaz: Podle předchozí věty (a poznámky) platí

$$\int \left(\sum_{k=1}^{n} f_n \right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f_k\,d\mu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Limitním přechodem a s využitím Leviho věty dostaneme tvrzení. □

Tvrzení 4.6 $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \implies \left|\int f\,d\mu\right| \le \int |f|\,d\mu$.

Důkaz: Podle trojúhelníkové nerovnosti a definice integrálu platí

$$\left| \int f\,d\mu \right| = \left| \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu \right| \le \int f^+\,d\mu + \int f^-\,d\mu = \int |f|\,d\mu.$$

□

Cvičení:

1. $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu) \implies \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
2. Je-li funkce f měřitelná a $|f| \le g$ pro nějakou funkci $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak i $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Věta 4.7 (Zobecněná Leviho věta) *Buďte funkce f_n měřitelné na X ($n \in \mathbb{N}$) takové, že $f_n \nearrow f$ a $\int f_1\,d\mu > -\infty$. Pak $\int f_n\,d\mu \nearrow \int f\,d\mu$.*

Důkaz: Je-li $\int f_1\,d\mu = \infty$, tvrzení zřejmě platí. Nechť tedy $\int f_1\,d\mu \in \mathbb{R}$. Protože $0 \le f_n - f_1 \nearrow f - f_1$, podle Leviho věty platí $\int (f_n - f_1)\,d\mu \nearrow \int (f - f_1)\,d\mu$, a z aditivity integrálu dostaneme $\int f_n\,d\mu \nearrow \int f\,d\mu$. □

Důsledek 4.8 *Jsou-li funkce f_n měřitelné, $f_n \searrow f$ a $\int f_1\,d\mu < \infty$, pak $\int f_n\,d\mu \searrow \int f\,d\mu$.*

Definice 4.3 Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Řekneme, že vlastnost $V(x)$ mají (μ-)*skoro všechny* body $x \in X$ (zkráceně *s.v.*), jestliže $\{x \in X : \neg V(x)\}$ je (μ-)nulová množina.

Tvrzení 4.9 *Nechť f, g jsou měřitelné funkce na X takové, že $f = g$ s.v. Pak platí*

$$\int f\,d\mu = \int g\,d\mu, \text{ má-li jedna strana smysl.}$$

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že f i g jsou nezáporné funkce. Je-li $s \leq f$ libovolná měřitelná jednoduchá funkce, pak $s' := s\chi_{\{f=g\}}$ je rovněž jednoduchá měřitelná a splňuje $s' \leq g$ a $\int s\,d\mu = \int s'\,d\mu$. Musí tedy být $\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$. Obrácená nerovnost plyne ze symetrie. Bez předpokladu nezápornosti ukážeme rovnost integrálu z kladných a záporných částí (platí totiž zřejmě také $f^+ = g^+$ s.v. a $f^- = g^-$ s.v.). $\square$

Pozn.:

1. Pro účely integrálu stačí, aby funkce byla definována skoro všude.
2. Nechť je prostor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *úplný*. Pak z rovnosti $f = g$ s.v. plyne
$$f \text{ je měřitelná} \iff g \text{ je měřitelná.}$$
3. Při zúplnění prostoru s mírou se integrály definované v původním prostoru nemění.

Věta 4.10 (Lebesgueova; o konvergentní majorantě) *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, f měřitelné funkce takové, že $f_n \to f$ s.v. Nechť dále existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f_n| \leq g$ s.v. pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$.*

Důkaz: Předefinujeme-li funkce f_n, f na množině

$$\{x : f_n(x) \not\to f(x)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : |f_n(x)| > g(x)\}$$

nulové míry, budou předpoklady věty platit pro všechna $x \in X$. Označme

$$g_n := \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, \quad h_n := \sup\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě platí

$$-g \leq g_n \leq f_n \leq h_n \leq g, \quad n \in \mathbb{N},$$

tedy $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, a $g_n \nearrow f$, $h_n \searrow f$, $n \to \infty$, tedy podle zobecněné Leviho věty platí $\int g_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$ a $\int h_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$. Protože $\int g_n\,d\mu \leq \int h_n\,d\mu \leq \int h_n\,d\mu$, platí také $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$ podle věty o dvou strážnících. $\square$

Důsledek 4.11 *Jsou-li f_i měřitelné, $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ konverguje s.v., a $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|\sum_{i=1}^{n} f_i| \leq g$ s.v. pro všechna n, pak $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a*

$$\int \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i \right) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i\,d\mu.$$