Přednáška 9.11.2020

Definice 8.2 (Obraz míry) Buď $\varphi : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$ měřitelné zobrazení a μ míra na $(E, \mathcal{E})$. Pak množinová funkce

$$\mu\varphi^{-1} : B \mapsto \mu(\varphi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{F},$$

je míra na $(F, \mathcal{F})$ a nazýváme ji *obrazem míry* μ při zobrazení φ.

Tvrzení 8.3 (Symetrie součinové míry) *Platí $\nu \otimes \mu = (\mu \otimes \nu)\tau^{-1}$, kde $\tau : X \times Y \to Y \times X$ je záměna souřadnic, tedy $\tau : (x, y) \mapsto (y, x)$.*

Důkaz: Nejprve ověříme, že $\tau^{-1}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$. Toto snadno plyne z Věty 3.1 (ii), neboť $\tau^{-1}(\sigma\mathcal{S}) = \sigma(\tau^{-1}\mathcal{S})$, kde $\mathcal{S}$ značí systém všech měřitelných obdélníků v $X \times Y$.

Míry $\nu \otimes \mu$ a $(\mu \otimes \nu)\tau^{-1}$ se shodují na měřitelných obdélnících, tedy se rovnají podle předchozí věty. □

Důsledek 8.4 *Platí*

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int \mu(E^y)\, d\nu(y), \quad E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

Důkaz: Platí

$$(\mu \otimes \nu)(E) = (\nu \otimes \mu)(\tau^{-1}(E)) = \int \mu((\tau^{-1}E)_y)\, d\nu(y) = \int \mu(E^y)\, d\nu(y),$$

využili jsme předchozího tvrzení a vztahu (1). □

Věta 8.5 (Fubiniova věta) *Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes \nu)$ platí:*

$$\int f\, d(\mu \otimes \nu) = \int \left(\int f(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Důkaz:

1. Je-li f charakteristickou funkcí množiny ze součinové σ-algebry, plyne rovnost z (1) a Důsledku 8.4.

2. Pro jednoduchou měřitelnou funkci $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{E_i}$ máme

$$\begin{aligned} \int s\, d(\mu \otimes \nu) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \int \nu((E_i)_x)\, d\mu(x) \\ &= \int \sum_{i=1}^k \alpha_i \nu((E_i)_x)\, d\mu(x) \\ &= \int (\int s(x, y)\, d\nu(y))\, d\mu(x). \end{aligned}$$

   Z uvedeného výpočtu rovněž plyne, že funkce $x \mapsto \int s(x, y)\, d\nu(y)$ je měřitelná pro libovolné $y \in Y$. Druhá rovnost se odvodí analogicky.

3. Buď $f \geq 0$ měřitelná a $s_n \nearrow f$ jednoduché měřitelné funkce. Pak podle Leviho věty

$$\int s_n(x,y)\, d\nu(y) \nearrow \int f(x,y)\, d\nu(y), \quad x \in X.$$

Protože integrály na levé straně jsou měřitelnými funkcemi proměnné x, i integrál na pravé straně je měřitelnou funkcí v x a opětovným použitím Leviho věty dostaneme

$$\int\int s_n(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) \nearrow \int\int f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x).$$

Podle již dokázané části 2 se integrál na levé straně shoduje s

$$\int s_n\, d(\mu \otimes \nu) \nearrow \int f\, d(\mu \otimes \nu),$$

čímž dostáváme první z obou dokazovaných rovností (a druhá opět plyne analogicky).

4. Je-li $f = f^+ - f^- \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes \nu)$, ověříme rovnost snadno pomocí příslušných rovností pro f^+ a f^-.

$\square$

Příklad: Uvažujme $X = Y = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $\mu = \nu$ je aritmetická míra. Definujme funkci $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ následovně:

$$f(z_1, z_2) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } z_2 = z_1 \geq 0 \text{ nebo } z_2 = z_1 - 1 \leq -1, \\ -1 & \text{pokud } z_2 = z_1 < 0 \text{ nebo } z_2 = z_1 - 1 > -1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Platí

$$\int\int f(z_1, z_2) d\mu(z_1)\, d\mu(z_2) = \sum_{z_2} \sum_{z_1} f(z_1, z_2) = 0,$$

ale

$$\int\int f(z_1, z_2) d\mu(z_2)\, d\mu(z_1) = \sum_{z_1} \sum_{z_2} f(z_1, z_2) = 2,$$

přitom ovšem $f \notin \mathcal{L}^*(\mu \otimes \mu)$.

Pozn.: Prostor se součinovou mírou $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ nemusí být úplný, ani když prostory $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ jsou úplné. Zúplněný prostor se součinovou mírou značíme $(X \times Y, \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}, \mu \hat{\otimes} \nu)$.

Důsledek 8.6 (Fubiniova věta pro zúplněnou součinovou míru) *Buďte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dva úplné prostory se σ-konečnými měrami. Pak pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mu \hat{\otimes} \nu)$ platí:*

$$\int f\, d(\mu \hat{\otimes} \nu) = \int \left(\int f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Důkaz: Rovnost nejprve dokážeme pro případ $f = \chi_E$, kde $E \in \mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}$. Podle Věty 2.4 existuje $F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ taková, že $E \triangle F$ je nulová, tedy

$$\int f\, d(\mu\hat{\otimes}\nu) = (\mu\hat{\otimes}\nu)(E) = (\mu \otimes \nu)(F).$$

Podle Fubiniovy věty platí $(\mu \otimes \nu)(F) = \int \nu(F_x)\, d\mu(x)$. Ukážeme-li, že

$$\int \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int \nu(F_x)\, d\mu(x),$$

dokážeme tím první z dvou dokazovaných rovností věty pro případ $f = \chi_E$ (druhá rovnost plyne analogicky.) K tomu stačí ukázat, že $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ μ-s.v. Z definice nulové množiny víme, že existuje $N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ taková, že $E \triangle F \subset N$ a $(\mu \otimes \nu)(N) = 0$. Ze vztahu (1) plyne $\nu(N_x) = 0$ μ-s.v. Dále zřejmě platí

$$E_x \triangle F_x = (E \triangle F)_x \subset N_x,$$

tedy také $\nu(E_x \triangle F_x) = 0$ μ-s.v., a tudíž $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ μ-s.v.

Dále lze postupně ukázat platnost rovnosti pro jednoduché měřitelné funkce, nezáporné měřitelné funkce a funkce z $\mathcal{L}^*(\mu\hat{\otimes}\nu)$, stejně jako v důkazu Věty 8.5. □

Věta 8.7 (Součin Lebesgueových měr) *Pro $p, q \in \mathbb{N}$ platí:*

(i) $\mathcal{B}^{p+q} = \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q$,

(ii) $\lambda^{p+q} = \lambda^p \otimes \lambda^q$.

Důkaz: (i). Každý otevřený $(p+q)$-kvádr je kartézským součinem otevřeného p-kvádru a otevřeného q-kvádru. Nechť $\mathcal{Q}^k$ značí systém všech otevřených k-kvádrů. Pak platí

$$\mathcal{B}^{p+q} = \sigma\{U \times V : U \in \mathcal{Q}^p,\, V \in \mathcal{Q}^q\} \subset \sigma\{A \times B : A \in \mathcal{B}^p,\, B \in \mathcal{B}^q\} = \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q.$$

Pro druhou inkluzi stačí ukázat, že $A \times B \in \mathcal{B}^{p+q}$ kdykoliv $A \in \mathcal{B}^p$ a $B \in \mathcal{B}^q$. Označme

$$\mathcal{D}_1 := \{A \in \mathcal{B}^p : A \times V \in \mathcal{B}^{p+q} \text{ kdykoliv } V \in \mathcal{Q}^q\}.$$

Zřejmě $\mathcal{Q}^p \subset \mathcal{D}_1$ a snadno lze ukázat, že $\mathcal{D}_1$ je σ-algebra. Platí tedy $\mathcal{D}_1 = \mathcal{B}^p$. Dále označme

$$\mathcal{D}_2 := \{B \in \mathcal{B}^q : A \times B \in \mathcal{B}^{p+q} \text{ kdykoliv } A \in \mathcal{B}^p\}.$$

Platí $\mathcal{Q}_q \subset \mathcal{D}_2$ (protože $\mathcal{D}_1 = \mathcal{B}^p$) a $\mathcal{D}_2$ je opět σ-algebra, tudíž $\mathcal{D}_2 = \mathcal{B}^q$. σ-algebra $\mathcal{B}^{p+q}$ tedy obsahuje všechny měřitelné obdélníky v $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, a musí tedy obsahovat i $\mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q$.

(ii). Míry λ^{p+q} a $\lambda^p \otimes \lambda^q$ se shodují na otevřených kvádrech z $\mathcal{Q}^{p+q}$. Systém $\mathcal{Q}^{p+q}$ je uzavřen na konečné průniky, generuje $\mathcal{B}^{p+q}$ a existuje posloupnost otevřených kvádrů $Q_i \nearrow \mathbb{R}^{p+q}$ konečné míry, tedy λ^{p+q} a $\lambda^p \otimes \lambda^q$ se shodují i na $\mathcal{B}^{p+q}$ podle Věty 7.3. □

V dalším budeme symbolem $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^k)$ zkráceně značit prostor $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_0^k, \lambda^k)$.

Důsledek 8.8 (Fubiniova věta v $\mathbb{R}^{p+q}$) *Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ platí*

$$\int f(x,y)\,d(x,y) = \int \left(\int f(x,y)\,dy \right) dx = \int \left(\int f(x,y)\,dx \right) dy,$$

kde píšeme stručně $dx := d\lambda^p(x)$, $dy := d\lambda^q(y)$, $d(x,y) := d\lambda^{p+q}(x,y)$.

Důsledek 8.9 *Pro množinu $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ platí*

$$\lambda^{p+q}(A) = \int_{\pi_1 A} \lambda^q(A_x)\,dx = \int_{\pi_2 A} \lambda^p(A^y)\,dy,$$

kde $\pi_1 : (x,y) \mapsto x$ a $\pi_2 : (x,y) \mapsto y$ jsou projekce.

Důsledek 8.10 *Pro funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ a množinu $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ platí*

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\pi_1 A} \left(\int_{A_x} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\pi_2 A} \left(\int_{A^y} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Příklad: Pro jednotkovou kouli $B_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ v $\mathbb{R}^3$ dostáváme podle Důsledku 8.9

$$\lambda^3(B_1) = \int_{-1}^{1} \pi(1 - z^2)\,dz = \frac{4}{3}\pi.$$