Přednáška 30.11.2020

Věta 11.6 *Nechť $\mu(X) < \infty$ a $1 \le p < q \le \infty$. Pak $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ a pro $f_n, f \in L^q(\mu)$ platí:*

$$f_n \xrightarrow{L^q} f \implies f_n \xrightarrow{L^p} f.$$

Důkaz: Je-li $f \in L^q$, platí

$$\int |f|^p = \int_{|f|\le 1} |f|^p + \int_{|f|>1} |f|^p \le \mu(X) + \int |f|^q < \infty,$$

tedy $f \in L^p$. Nechť dále $f_n \xrightarrow{L^q} f$ a $\varepsilon > 0$. Pro $\delta > 0$ je

$$\int |f_n - f|^p = \int\limits_{|f_n - f| \le \delta} |f_n - f|^p + \int\limits_{|f_n - f| > \delta} |f_n - f|^p \le \delta^p \mu(X) + \delta^{p-q} \int |f_n - f|^q.$$

Zvolme $\delta > 0$ tak malé, aby $\delta^p \mu(X) < \frac{\varepsilon}{2}$. K tomuto δ pak existuje n_0 takové, že $\delta^{p-q} \int |f_n - f|^q < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $n \ge n_0$. Pak je $\int |f_n - f|^p < \varepsilon$ pro $n \ge n_0$, a tím je $f_n \xrightarrow{L^p} f$ dokázáno. □

Příklad: $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ leží v $L^1(0,1)$, ale nikoliv v $L^2(0,1)$. Funkce $f(x) = x^{-1}$ leží v $L^2(1,\infty)$, ale nikoliv v $L^1(1,\infty)$.

12 Radon-Nikodymova věta

Tvrzení 12.1 *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $f \ge 0$ měřitelná funkce na X. Pak předpis*

$$\nu : A \mapsto \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

definuje míru na $(X, \mathcal{A})$ a pro každou měřitelnou funkci g na X platí

$$\int g \, d\nu = \int g \cdot f \, d\mu,$$

má-li jedna strana smysl.

Důkaz: Zřejmě $\nu(\emptyset) = 0$ a $\nu \ge 0$. Ukážeme σ-aditivitu. Jsou-li $A_n \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní, je

$$\nu\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \int (f \cdot \chi_{\bigcup_n A_n}) \, d\mu = \int \sum_n (f \cdot \chi_{A_n}) \, d\mu = \sum_n \int_{A_n} f \, d\mu = \sum_n \nu(A_n).$$

Rovnost $\int g \, d\nu = \int g \cdot f \, d\mu$ platí z definice, pokud g je charakteristickou funkcí měřitelné množiny. Standardním způsobem platnost rovnosti rozšíříme postupně pro jednoduché měřitelné funkce, nezáporné měřitelné a nakonec pro měřitelné, pro něž integrál existuje. □

Pozn.: Zřejmě platí: $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$, $A \in \mathcal{A}$.

Definice 12.1 Buďte μ, ν dvě míry na $(X, \mathcal{A})$. Řekneme, že míra ν je *absolutně spojitá* vzhledem k míře μ (píšeme $\nu \ll \mu$), jestliže

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Tvrzení 12.2 *Buďte μ, ν dvě konečné míry na $(X, \mathcal{A})$. Pak $\nu \ll \mu$ právě tehdy, když*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall A \in \mathcal{A}) : \mu(A) < \delta \implies \nu(A) < \varepsilon.$$

Důkaz: Implikace $\Longleftarrow$ je snadno vidět. Ukážeme opačnou implikaci. Nechť tedy $\nu \ll \mu$ a předpokládejme pro spor, že neplatí uvedený výrok, tedy že

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists A \in \mathcal{A}) : \mu(A) < \delta, \, \nu(A) \geq \varepsilon.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy existuje množina $A_n \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(A) < 2^{-n}$, ale $\nu(A) \geq \varepsilon$. Položme $A := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n$. Pak

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) < 2^{-k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

tedy $\mu(A) = 0$. Přitom ale, podle věty o spojitosti míry (míra ν je konečná) platí

$$\nu(A) = \lim_{k \to \infty} \nu\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right) \geq \liminf_{k \to \infty} \mu(A_{k+1}) \geq \varepsilon > 0,$$

což je spor. □

Věta 12.3 (Radon-Nikodym) *Buďte μ, ν dvě σ-konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že $\nu \ll \mu$. Pak existuje nezáporná měřitelná funkce f na X taková, že*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Definice 12.2 Funkci f z předchozí věty nazýváme (Radon-Nikodymovou) *hustotou* míry ν vyhledem k μ a píšeme

$$f(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x), \quad x \in X.$$

Tvrzení 12.4 *Buďte μ, ν dvě konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že $\nu(A) \leq \mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$. Pak existuje měřitelná funkce f na X splňující $0 \leq f \leq 1$ μ-s.v. a*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Důkaz: Označme funkcionál

$$\mathcal{J}g := \int g^2\,d\mu - 2\int g\,d\nu, \quad g \in L^2(\mu).$$

(Funkcionál je dobře definován, protože $L^2(\mu) \subset L^1(\mu) \subset L^1(\nu)$.) Dále označme $c := \inf\{\mathcal{J}g : g \in L^2(\mu)\}$. Platí

$$\mathcal{J}g \geq \int g^2\,d\mu - 2\int |g|\,d\mu = \int (|g|-1)^2\,d\mu - \mu(X) \geq -\mu(X),$$

tedy $c \geq -\mu(X) > -\infty$. Buď $(f_n) \subset L^2(\mu)$ posloupnost taková, že $\mathcal{J}f_n \to c$. Ukážeme, že (f_n) je cauchyovská v $L^2(\mu)$.

Pro libovolné $g, h \in L^2(\mu)$ platí

$$\begin{aligned} \mathcal{J}g + \mathcal{J}h &= \int (g^2+h^2)\,d\mu - 2\int (g+h)\,d\nu, \\ -2\mathcal{J}(\tfrac{g+h}{2}) &= -\int \tfrac{(g+h)^2}{2}\,d\mu + 2\int (g+h)\,d\nu, \end{aligned}$$

sečtením pak dostaneme

$$\mathcal{J}g + \mathcal{J}h - 2\mathcal{J}(\tfrac{g+h}{2}) = \frac{1}{2}\int (g-h)^2\,d\mu = \frac{1}{2}\|g-h\|_2^2.$$

Z toho plyne, že

$$\begin{aligned} \|f_m - f_n\|_2^2 &= 2\Big(\mathcal{J}f_m + \mathcal{J}f_n - 2\mathcal{J}(\tfrac{f_m+f_n}{2})\Big) \\ &\leq 2\,(\mathcal{J}f_m + \mathcal{J}f_n - 2c) \to 0, \quad m,n \to \infty, \end{aligned}$$

tedy (f_n) je cauchyovská v $L^2(\mu)$.

Dále platí $\int f_n^2\,d\mu \to \int f^2\,d\mu$ (protože norma je vždy spojitá), a

$$\left|\int f_n\,d\nu - \int f\,d\nu\right| \leq \int |f_n - f|\,d\nu \leq \int |f_n - f|\,d\mu \to 0,$$

protože $f_n \to f$ i v $L^1(\mu)$. Platí tedy $\mathcal{J}f_n \to f$, takže $\mathcal{J}f = c$.

Buďte nyní $A \in \mathcal{A}$ a $t \in \mathbb{R}$ libovolné. Protože $\mathcal{J}f \leq \mathcal{J}(f + t\chi_A)$, platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{J}(f+t\chi_A) - \mathcal{J}f = \int ((f+t\chi_A)^2 - f^2)\,d\mu - 2\int t\chi_A\,d\nu \\ &= \int f\cdot 2t\chi_A\,d\mu + t^2\mu(A) - 2t\nu(A) \\ &= 2t\left(\int_A f\,d\mu - \nu(A)\right) + t^2\mu(A). \end{aligned}$$

V posledním řádku je kvadratický polynom v t, který nabývá minima v $t = 0$, tedy jeho lineární člen musí být roven nule, neboli

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu.$$

f je tedy hustotou $\frac{d\nu}{d\mu}$. Zbývá ukázat, že $0 \leq f \leq 1$ μ-s.v. Platí

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int (f-1)^+ \, d\mu &= \int_{\{f>1\}} (f-1) \, d\mu = \int_{\{f>1\}} f \, d\mu - \int_{\{f>1\}} 1 \, d\mu \\
&= \nu(\{f>1\}) - \mu(\{f>1\}) \leq 0,
\end{aligned}
$$

tedy $(f-1)^+ = 0$ μ-s.v., neboli $f \leq 1$ μ-s.v. Podobně platí

$$
0 \leq \int f^- \, d\mu = -\int_{\{f<0\}} f \, d\mu = -\nu(\{f<0\}) \leq 0,
$$

tedy $f^- = 0$ μ-s.v., což znamená, že $f \geq 0$ μ-s.v. $\square$