Cvičení - Teorie míry a integrálu 1
ZS 2020/21
Po 14:00 K8

Jan Rataj

1 Cvičení 5.10.2020
Konvergence Newtonova integrálu

Připomenutí: *Newtonův integrál* z funkce f na intervalu (a, b) je definován jako rozdíl limit primitivní funkce v krajních bodech (pokud existují):

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b_-) - F(a_+).$$

Buď funkce f *spojitá* na intervalu (a, b). Pak existence (konvergence) Newtonova integrálu $\int_a^b f$ je dána existencí vlastních limit primitivní funkce, $F(a_+)$ a $F(b_-)$. (Je-li f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, Newtonův integrál samozřejmě existuje.)

Příklad: $\int_0^1 x^a\,dx$ konverguje $\iff$ $a > -1$. $\int_1^\infty x^a\,dx$ konverguje $\iff$ $a < -1$.

Tvrzení 1.1 *Je-li f spojitá a omezená na omezeném intervalu (a, b), integrál $\int_a^b f$ konverguje.*

[Důkaz]

Věta 1.2 (Srovnávací kriterium pro konvergenci integrálu) *Nechť f a g jsou nezáporné funkce spojité na intervalu $[a, b)$ a nechť $f \leq g$ na $[a, b)$. Jestliže $\int_a^b g$ konverguje, pak konverguje i $\int_a^b f$.*

Věta 1.3 (Limitní srovnávací kriterium pro konvergenci integrálu) *Nechť f a g jsou nezáporné funkce spojité na intervalu $[a, b)$ a nechť existuje $\lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} =: c$. Pak*

(a) $c \in (0, \infty) \implies [\int_a^b f$ konverguje $\iff \int_a^b g$ konverguje $]$.

(b) $c = 0 \implies [\int_a^b g$ konverguje $\implies \int_a^b f$ konverguje $]$.

(c) $c = \infty \implies [\int_a^b g$ diverguje $\implies \int_a^b f$ diverguje $]$.

Pozn.: Analogická kriteria platí pro funkce spojité na intervalu $(a, b]$.

Pozn.: Newtonův integrál je "*neabsolutně konvergentní*", např. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ konverguje, ale $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \infty$. Lebesgueův integrál, s nímž budeme pracovat, tuto vlastnost nemá, je to *absolutně konvergentní* integrál.

Vyšetřete konvergenci následujících integrálů:

1. $\int_0^1 \log x\, dx$,
2. $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx$,
3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}\, dx$,
4. $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\, dx$,
5. $\int_1^\infty \frac{\log x}{x}\, dx$,
6. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}\, dx$.

Zjistěte, pro které hodnoty parametrů následující integrály konvergují:

7. $\int_0^{\pi/2} (\mathrm{tg}(x))^p\, dx$,
8. $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx$,
9. $\int_0^1 \frac{\log(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx$,
10. $\int_0^\infty \sin\left(\sqrt{x^{2\alpha}+1} - x^\alpha\right)\, dx$,
11. $\int_0^\infty \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x}\, dx$.

Budeme vyšetřovat konvergenci integrálu i v tomto zobecněném smyslu: Řekneme, že $\int_a^b f(x)\, dx$ konverguje, jestliže existují $a < c_1 < \cdots < c_k < b$ takové, že Newtonův integrál konverguje na každém z intervalů (a, c_1), (c_1, c_2), $\ldots$, (c_{k-1}, c_k), (c_k, b).

Zjistěte, pro které hodnoty parametrů následující integrály konvergují:

12. $\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x}\, dx$ $(a > b)$,
13. $\int_0^1 \frac{\log|1-a^2x^2|}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

Domácí úkol č.1: (termín - 11.10.) Zjistěte, pro které hodnoty parametrů následující integrály konvergují:

$$\int_0^1 x^s(1-x^2)^t\, dx, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx.$$

2 Cvičení 12.10.2020
σ-algebry, σ-obaly

1. Ukažte, že algebra je uzavřená na množinové rozdíly.
2. Ukažte, že σ-algebra je uzavřená na spočetné průniky.
3. Nechť $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{S} = \{\{1, 2\}, \{4\}\}$. Popište $\sigma\mathcal{S}$.
4. Buď $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{F \subseteq \mathbb{N} : F$ konečná nebo $\mathbb{N}\backslash F$ konečná $\}$. Rozhodněte, zda $\mathcal{A}$ je algebra, σ-algebra, případně jak vypadá $\sigma\mathcal{A}$.
5. Nechť $\mathcal{A}$ je σ-algebra na nejvýše spočetné množině X. Řekneme, že množina $A \in \mathcal{A}$ je *atom* σ-algebry $\mathcal{A}$, jestliže
$$\forall B \in \mathcal{A} : \; B \cap A = \emptyset \text{ nebo } B \supset A.$$
Ukažte, že $\mathcal{A}$ sestává ze všech sjednocení svých atomů.
6. Buď $\mathcal{B}$ σ-algebra na X, $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{B}$. Ukažte, že
$$\sigma\big(\mathcal{B} \cup \{A\}\big) = \big\{(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A^C) : \; B_1, B_2 \in \mathcal{B}\big\}.$$
7. Buď $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $A_i := \{x \in X : \; x_i = 1\}$, $i \in \mathbb{N}$. Položme $\mathcal{A} := \sigma\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$. Ukažte:
   (a) $\{x \in X : \; x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n\} \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$.
   (b) $\{x\} \in \mathcal{A}$, $x \in X$.
   (c) $\{x \in X : \; \lim_{i\to\infty} x_i = 0\} \in \mathcal{A}$.
   (d) $\{x \in X : \; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = p\} \in \mathcal{A}$, $p \in [0, 1]$.

   Pozn.: Prostor X můžeme interpretovat jako pravděpodobnostní prostor všech výsledků z nekonečněkrát opakovaného hodu mincí.
8. Uvažujte zobrazení $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$ dané předpisem
$$f : (x_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}.$$
Ukažte:
   (a) Množina $S \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ posloupností s *konečným* počtem jedniček je spočetná,
   (b) f je prosté na $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus S$,
   (c) $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus S \to (0, 1]$ je bijekce,
   (d) obraz $f(\mathcal{A})$ σ-algebry $\mathcal{A}$ splývá s $\mathcal{B}(0, 1]$ (borelovské podmnožiny $(0, 1]$). (Návod: ukažte, že každý otevřený interval $I \subset (0, 1]$ je spočetným sjednocením "dyadických" intervalů typu $(\frac{p-1}{2^i}, \frac{p}{2^i}]$, $p = 1, \ldots, 2^i$, $i \in \mathbb{N}$.)

Domácí úkol č.2: úlohy 2 a 8(d) (termín - 19.10.)

3 Cvičení 19.10.2020 Nulové množiny, zúplnění míry

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

1. Rozcvička: ukažte, že pro všechny posloupnosti množin $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ platí
$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \mu(A_i)$$
(*subaditivita* míry).

Připomeňme si definici nulových množin:

$$\mathcal{N} := \{N \subset X : \exists A \in \mathcal{A},\, N \subset A,\, \mu(A) = 0\}.$$

2. Popište nulové množiny pro (a) Diracovu míru δ_x, (b) aritmetickou míru μ.

Připomeňme si zavedení Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}$: $\lambda(= \lambda^1)$ je borelovská míra na $\mathbb{R}$ splňující $\lambda(I) = |I|$ pro každý interval I ($|I|$ značí délku I). (Existence a jednoznačnost zatím nebyla dokázána.) Lebesgueova míra je *regulární* v tomto smyslu: pro každou borelovskou množinu $B \subset \mathbb{R}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují otevřená madmnožina $G \supset B$ a uzavřená podmnožina $F \subset B$ takové, že $\lambda(G \setminus F) < \varepsilon$.

Označme

$$\mathcal{C} := \left\{ A \subset \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\, \exists \text{ otevřené intervaly } I_1, I_2, \dots \text{ takové, že } A \subset \bigcup_i I_i \right.$$
$$\left. \text{a } \sum_i |I_i| < \varepsilon \right\}.$$

3. Ukažte, že (a) $\mathcal{C} \subset \mathcal{N}$, (b) $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$. Tedy $\mathcal{C}$ jsou všechny lebesgueovsky nulové množiny v $\mathbb{R}$.

Nyní si dokážeme větu 2.4 z přednášky:

Věta (2.4. Zúplnění míry) *Je dán prostor s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pak platí:*

1. $\mathcal{A}_0 = \{B \subset X : \exists A \in \mathcal{A}, B \triangle A \in \mathcal{N}\}$ *(symbolem $\triangle$ značíme symetrickou diferenci množin).*
2. *Míru μ lze jednoznačně rozšířit na prostor $(X, \mathcal{A}_0)$ (značíme opět μ).*
3. *V prostoru $(X, \mathcal{A}_0, \mu)$ jsou všechny nulové množiny měřitelné.*

Cantorovo diskontinuum: Položme $C_0 := [0,1]$ a indukcí definujme množiny $C_n := \phi(C_{n-1}) \cup \psi(C_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, kde

$$\phi(t) = \frac{1}{3}t, \quad \psi(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cantorovo diskontinuum $C \subset [0,1]$ je definováno jako průnik

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Domácí úkol č.3: (termín - 26.10.) Ukažte, že:

(i) $C \neq \emptyset$,

(ii) C je nespočetná množina (ukažte, že C je prostým obrazem množiny $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$),

(iii) C je nulová (vzhledem k Lebesgueově míře).

4 Cvičení 26.10.2020 Abstraktní Lebesgueův integrál, aditivita

Připomenutí - definice abstraktního Lebesgueova integrálu na prostoru s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

1. Čemu se rovná $\int f\, d\delta_x$, je-li δ_x *Diracova míra* v bodě $x \in X$?
2. Čemu se rovná $\int f\, d\mu$, je-li μ *aritmetická míra* na X?
3. K funkci $f(x) = x$, $x \in [0,1]$ a $f(x) = 0$ jinak, najděte posloupnost nezáporných jednoduchých měřitelných funkcí $s_n \nearrow f$, a pomocí ní spočtěte $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda$.
4. Totéž jako v předchozím příkladu, ale s funkcí $f(x) = 2^x$, $x \in [0,1]$.
5. Ukažte, že pro Dirichletovu funkci $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{Q}$, a $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, platí $\int g\, d\lambda = 0$.

Důkaz věty z přednášky:

Věta (4.4 Linearita integrálu) *Jsou-li funkce $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak platí*

$$\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu, \quad \int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu,$$

má-li pravá strana smysl.

5. Ukažte, že pro $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ platí monotonie: $f \leq g \implies \int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$. (Z přednášky to víme pro *nezáporné* měřitelné funkce.)

6. Ukažte: Je-li funkce f měřitelná a $|f| \leq g$ pro nějakou funkci $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak i $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

7. Nechť je prostor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *úplný*. Ukažte, že z rovnosti $f = g$ s.v. plyne: [f je měřitelná $\iff$ g je měřitelná.]

8. Najděte posloupnost jednoduchých měřitelných funkcí s_n na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ takových, že $s_n \searrow 0$, ale $\int s_n \, d\lambda \not\to 0$.

9. Je možné takovou posloupnost s_n najít na prostoru $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda|[0,1])$ (Lebesgueova míra restringovaná na interval $[0,1]$)?

10. Pro funkce $f_n(x) = n$, $x \in (0, \frac{1}{n})$, a $f_n(x) = 0$ jinak, platí: $f_n(x) \to 0$ bodově, ale $\int_0^1 f_n \, d\lambda^1 \not\to 0$. Proč zde nelze použít Leviho větu?

Domácí úkol č. 4: příklad č. 4 (termín - 2.11.)

5 Cvičení 2.11.2020 Záměna limity a integrálu, sumy a integrálu

Teoretické prostředky (připomenutí):

- (zobecněná) Leviho věta a její důsledky:
  - Jsou-li funkce f_n měřitelné, $f_n \nearrow f$ a $\int f_1 \, d\mu > -\infty$, pak $\int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$.
  - Jsou-li funkce f_n měřitelné, $f_n \searrow f$ a $\int f_1 \, d\mu < \infty$, pak $\int f_n \, d\mu \searrow \int f \, d\mu$.
  - Pro nezáporné měřitelné funkce f_n na X platí
$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$
- Lebesgueova věta o konvergentní majorantě a její důsledek:
  - Buďte f_n, f měřitelné funkce takové, že $f_n \to f$ s.v. Nechť dále existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f_n| \leq g$ s.v. pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.
  - Jsou-li f_i měřitelné, $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ konverguje s.v., a $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|\sum_{i=1}^{n} f_i| \leq g$ s.v. pro všechna n, pak $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a
$$\int \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i \right) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, d\mu.$$

V následujících příkladech ověřte, zda lze provést záměnu limity a integrálu:

1. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\, dx$,
2. $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\, dx$,
3. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^2 x(1-x)^n\, dx$.

Dokažte následující tvrzení:

Tvrzení *Jsou-li f_n měřitelné funkce na prostoru s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$ takové, že $\sum_n \int_X |f_n|\, d\mu < \infty$, pak*

$$\sum_n \int_X f_n\, d\mu = \int_X \sum_n f_n\, d\mu.$$

Vypočtěte následující integrály rozvojem funkce do řady. Zdůvodněte záměnu sumy a integrálu:

4. $\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\, dx$,
5. $\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\, dx$,
6. $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\, dx$,
7. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\, dx$.

Domácí úkol č. 5: (termín - 9.11.) Spočtěte pomocí rozvoje do řady. Zdůvodněte záměnu sumy a integrálu:

$$(i) \int_0^1 \frac{x \log \frac{1}{x}}{1-x^2}\, dx, \quad (ii) \int_0^\infty \log(1+e^{-x})\, dx.$$

6 Cvičení 9.11.2020 Integrály závislé na parametru

Připomenutí vět:

Věta (Lebesgueova; o spojité závislosti integrálu na parametru) *Buďte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, T metrický prostor a $f : T \times X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

(i) *$f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in T$,*

(ii) *$f(\cdot, x)$ je spojitá na T pro s.v. $x \in X$,*

(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f(t, \cdot)| \le g$ s.v. pro všechna $t \in T$.*

Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in T$ a funkce

$$F : t \mapsto \int f(t, x)\, d\mu(x)$$

je spojitá na T.

Věta (Záměna integrálu a derivace) *Buďte* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mírou,* $I \subset \mathbb{R}$ *otevřený interval a* $f : I \times X \to \mathbb{R}$ *funkce. Nechť dále*

(i) $f(t, \cdot)$ *je měřitelná pro každé* $t \in I$,

(ii) *existuje* $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$, *taková, že pro všechna* $x \in X \setminus N$ *a pro všechna* $t \in I$ *existuje vlastní derivace* $\frac{d}{dt} f(t, x)$,

(iii) *existuje* $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *taková, že pro všechna* $t \in I$, $|\frac{d}{dt} f(t, x)| \leq g(x)$ *pro s.v.* $x \in X$,

(iv) *existuje* $t_0 \in I$ *takové, že* $f(t_0, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *pro všechna* $t \in I$, *funkce*

$$F : t \mapsto \int f(t, x) \, d\mu(x)$$

je diferencovatelná na I *a platí*

$$F'(t) = \int \frac{d}{dt} f(t, x) \, d\mu(x), \quad t \in I.$$

1. Ukažte, že funkce $F : t \mapsto \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{1+x^2} \, dx$ je spojitá na $[0, \infty)$.

2. Ukažte, že funkce $F : t \mapsto \int_0^\infty e^{-tx^2} \, dx$ je spojitá na $(0, \infty)$ a $\lim_{t \to 0_+} F(t) = \infty$.

3. Najděte definiční obor a vyšetřete spojitost funkce

$$F : a \mapsto \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

   (Definičním oborem je zde myšlena množina všech hodnot $a \in \mathbb{R}$, pro něž uvedený Lebesgueův integrál konverguje.)

4. Najděte definiční obor a vyšetřete spojitost funkce

$$F : a \mapsto \int_0^\infty \frac{x}{2 + x^a} \, dx.$$

5. Funkce *Gamma* je definovaná předpisem

$$\Gamma : s \mapsto \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \, dx.$$

   Ukažte, že:

   (a) Funkce Gamma je definovaná a spojitá na intervalu $(0, \infty)$,

(b) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $s > 0$,

(c) $\Gamma(k) = (k-1)!$, $k = 1, 2, \dots$,

(d) $\lim_{s\to 0_+} \Gamma(s) = \lim_{s\to\infty} \Gamma(s) = \infty$,

(e) $\Gamma'(s) = \int_0^\infty (\log x) x^{s-1} e^{-x}\, dx$, $s > 0$.

6. Pro funkci
$$F : a \mapsto \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x}\, dx$$
najděte definiční obor, spočtěte $F'(a)$ a následně $F(a)$.

Domácí úkol č. 6: (termín - 16.11.) Pro následující funkce najděte definiční obor a vyšetřete spojitost:
$$(i)\ F(a) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi - x)}\, dx, \quad (ii)\ G(b) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-bx}\, dx.$$

7 Cvičení 16.11.2020 Integrály závislé na parametru, Fubiniova věta

Spočtěte derivováním podle parametru:

1. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\, dx$,
2. $\int_0^\pi \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\, dx$,
3. $\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x}\, dx$.

Domácí úkol č. 7: (termín - 23.11.) Zjistěte, pro která, $a, b \in \mathbb{R}$ integrál konverguje, a spočtěte derivováním podle parametru:
$$F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx.$$

8 Cvičení 23.11.2020 Fubiniova věta

Fubiniova věta - připomenutí:

- Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ platí
$$\int f(x,y)\, d(x,y) = \int \left(\int f(x,y)\, dy \right) dx = \int \left(\int f(x,y)\, dx \right) dy.$$
kde $dx := d\lambda^p(x)$, $dy := d\lambda^q(y)$, $d(x,y) := d\lambda^{p+q}(x,y)$.

- Pro množinu $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ platí
$$\lambda^{p+q}(A) = \int_{\pi_1 A} \lambda^q(A_x)\,dx = \int_{\pi_2 A} \lambda^p(A^y)\,dy,$$
kde $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$ a $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$ jsou projekce.
- Pro funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ a množinu $A \in \mathcal{B}^{p+q}$ platí
$$\int_A f(x, y)\,d(x, y) = \int_{\pi_1 A} \left(\int_{A_x} f(x, y)\,dy \right) dx = \int_{\pi_2 A} \left(\int_{A^y} f(x, y)\,dx \right) dy.$$

1. Ukažte, že pro každou přímku $P \subset \mathbb{R}^2$ a kružnici $K \subset \mathbb{R}^2$ platí $\lambda^2(P) = \lambda^2(K) = 0$.
2. Spočtěte $\lambda^2\{(x, y) : x^2 + y^2 < 6\}$.
3. Spočtěte $\lambda^2\{(x, y) : 0 < xy^2 < 1,\, x^2 < y\}$.
4. Spočtěte $\int_{x^2+y^2\le 1} \frac{d(x,y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.
5. Spočtěte $\lambda^3\{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1\}$.
6. Spočtěte $\iint_{(0,\infty)^2} \frac{dx\,dt}{(1+t)(1+tx^2)}$ dvěma způsoby s využitím Fubiniovy věty. Odvoďte vztah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
7. Fubiniova věta jako alternativa k derivování podle parametru: Pomocí Fubiniovy věty spočtěte $\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x}\,dx$.

Domácí úkol č. 8: (termín - 23.11.) S využitím Fubiniovy věty spočtěte ($R > 0$ je daný parametr)
$$\lambda^3\{(x, y, z) : x > 0,\, y > 0,\, x^2 + y^2 < R^2,\, 0 < z < xy\}.$$

9 Cvičení 30.11.2020 Fubiniova věta, věta o substituci

Věta o substituci - připomenutí:

Věta 9.1 *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus a $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ Lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*
$$\int_U f(\varphi(x))\,|\mathcal{J}\varphi(x)|\,dx = \int_{\varphi(U)} f(y)\,dy,$$
má-li jedna strana smysl.

1. Spočtěte
$$\lambda^2\{(x,y):\, y \le x^2 \le 4y,\, 2x \le y^2 \le 3x\}$$
(a) přímo pomocí Fubiniovy věty, (b) s využitím substituce $u = y^2/x$, $v = x^2/y$.

2. S využitím *polárních souřadnic* $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ spočtěte:
   (a) $\lambda^2\{(x,y):\, 1 < x^2+y^2 < 4\}$,
   (b) $\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} \frac{d(x,y)}{1-x^2-y^2}$,
   (c) $\lambda^2\{(x,y):\, (x^2+y^2)^2 \le 2a^2(x^2-y^2)\}$.

3. Funkce *Beta* je definovaná předpisem
$$B : (s,t) \mapsto \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx.$$
Ukažte, že funkce Beta je definovaná a spojitá na množině $(0,\infty)^2$. Odvoďte vztah
$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}, \quad s,t > 0.$$
(Vyjádřete součin $\Gamma(s)\Gamma(t)$ jako dvojný integrál ($d(x,y)$) a použijte substituci $x = zv$, $y = z(1-v)$.)

4. Integrací $\iint e^{-x^2-y^2}\,d(x,y)$ s využitím polárních souřadnic odvoďte hodnotu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Domácí úkol č.9: (termín - 7.12.2020) Spočtěte
$$\lambda^2\{(x,y):\, (x^2+2y^2)^2 \le x^2 y\}.$$
(Použijte variantu polárních souřadnic $x = ar\cos t$, $y = br\sin t$.)

10 Cvičení 7.12.2020 Fubiniova věta, věta o substituci

1. Spočtěte $\iint_M \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,d(x,y)$, kde
$$M = \{(x,y):\, x > 0,\, y > 0,\, \sqrt{x}+\sqrt{z} \le 1\}.$$
(Použijte substituci $x = r\cos^4 t$, $y = r\sin^4 t$.)

2. S pomocí *válcových souřadnic* $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = s$ spočtěte
$$\lambda^3\{(x,y,z):\, x^2+y^2+z^2 \le 2,\, x^2+y^2+z^2 \le 2z\}.$$

3. *Sférické souřadnice* jsou dány předpisem

$$x = r\cos\varphi\cos\psi,\ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ z = r\sin\psi,$$

$r > 0$, $-\pi < \varphi < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$. Ukažte, že uvedené zobrazení je regulární, najděte jeho obraz a spočtěte Jakobián.

4. Spočtěte míru množiny z příkladu 2 pomocí sférických souřadnic.

5. Spočtěte

$$\lambda^3\{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ x + 2y + z \le 2\}.$$

(Uvažte vhodné otočení v $\mathbb{R}^3$.)

6. Spočtěte

$$\int_M (x + y + z)^2\, d(x, y, z),$$

kde $M = \{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 \le 2az,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 3a^2\}$. (Nápověda: $\int_M (x + y + z)^2\, d(x, y, z) = \int_M (x^2 + y^2 + z^2)\, d(x, y, z)$.)

7. Spočtěte

$$\lambda^3\{2x^2 - y^2 + z^2 \le 2z,\ |y| \le 1\}.$$

Domácí úkol č.10: (termín - 14.12.2020) Spočtěte:

$$\lambda^3\{(x, y, z) :\ (x + y + z)^2 \le ay,\ x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

(Nápověda: použijte substituci $x = r\cos^2\varphi\cos^2\psi$, $y = r\sin^2\psi$, $z = r\sin^2\varphi\cos^2\psi$.)

11 Cvičení 14.12.2020

1. Spočtěte $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$. (Návod: počítejte $\iint e^{-x^2-y^2}\, d(x, y)$ dvěma způsoby.)

2. Sférické souřadnice v $\mathbb{R}^n$, výpočet Jakobiánu:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\alpha_1\cos\alpha_2 \dots \cos\alpha_{n-1}\\
x_2 &= r\sin\alpha_1\cos\alpha_2 \dots \cos\alpha_{n-1}\\
x_3 &= r\sin\alpha_2 \dots \cos\alpha_{n-1}\\
&\dots\\
x_n &= r\sin\alpha_{n-1},
\end{aligned}$$

$r > 0$, $\alpha_1 \in (-\pi, \pi)$, $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

3. Výpočet objemu jednotkové koule B_n v $\mathbb{R}^n$, $\omega_n := \lambda^n(B_n)$:

   (a) Ukažte pomocí Fubiniovy věty rekurentní vztah

$$\omega_n = \frac{2\pi}{n}\omega_{n-2}, n \ge 3.$$

(b) Ukažte, že

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Konvergence integrálů více proměnných: Vyšetřete konvergenci integrálů:

$$\iint_{\{x^2+y^2>1\}} \frac{d(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha},$$

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{d(x,y)}{(y^2\cos^2 x + \sin^2 x)^\alpha}$$

v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Domácí úkol č.11: (termín - 21.12.2020) Spočtěte:

$$\iiint_M e^{y^2}\, d(x,y,z),$$

kde $M = \{(x,y,z) : 2x^2 + 3z^2 < y < 4\}$.