Ukázka zadání k písemné zkoušce z Teorie míry a integrálu 1
zimní semestr 2020/21

Početní část (90 minut)

1. Najděte definiční obor a vyšetřete spojitost funkce
$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{x^{3/2}}\, dx.$$

2. Spočtěte
$$\int_0^1 \frac{x^2 \log \frac{1}{x}}{1 - x^2}\, dx,$$
víte-li, že $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3. Spočtěte Lebesgueovu míru množiny
$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2x^2 - y^2 + z^2 \le 2z, |y| \le 1\}.$$

Všechny výpočty řádně zdůvodněte a ověřte předpoklady vět, které používáte.

Bodování: maximum za příklad 10 bodů, požadováno minimálně 15 bodů.

přestávka 30 minut

Teoretická část (60 minut)

1. Definujte měřitelnost zobrazení, uveďte souvislost se spojitostí zobrazení mezi metrickými prostory. 5 bodů

2. Vyslovte a dokažte jednu z následujících dvou vět:

   (a) Věta o souvislosti konvergence v L^p a podle míry (včetně potřebné nerovnosti) 10 bodů

(b) Radon-Nikodymova věta 15 bodů

3. Rozhodněte (a zdůvodněte), zda pro funkce $f_n, f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ platí:

$$f_n \xrightarrow{L^2} f \implies f_n^2 \xrightarrow{L^1} f^2.$$

10 bodů

Požadováno minimálně 15 bodů.

Výsledná známka:

- 50–60 bodů: **1**
- 40–49 bodů, alespoň 15 bodů z každé části: **2**
- 30–39 bodů, alespoň 15 bodů z každé části: **3**
- 0–29 bodů, nebo méně než 15 bodů z některé části: **4**

Neuspějete-li u zkoušky, ale získáte z jedné části alespoň 20 bodů, nemusíte již tuto část v dalším termínu opakovat.