Konvexní tělesa
LS 2024/25

Přednáška 17.2.2025

1 Úvod, kombinatorické věty

Naším základním prostorem bude po většinu času prostor $\mathbb{R}^d$ se standardním skalárním součinem a normou. Některé pojmy a věty lze formulovat obecněji v *afinním prostoru* $\mathcal{A}_d$ dimenze d; vystačíme zde s představou afinního podprostoru prostoru $\mathbb{R}^D$ s $D > d$.

V prostoru $\mathcal{A}_d$ (či speciálně $\mathbb{R}^d$) je bod $x \in \mathcal{A}_d$ *afinní kombinací* bodů $x_0, \dots, x_k$ s koeficienty $t_0, \dots, t_k$, pokud $t_0 + \dots + t_k = 1$ ($t_i \in \mathbb{R}$) a $x = t_0 x_0 + \dots + t_k x_k$. Pro podmnožinu $A \subset \mathcal{A}_d$ definujeme její *afinní obal* $\operatorname{aff} A$ jako nejmenší afinní podprostor $\mathcal{A}_d$ obsahující A, přitom $\operatorname{aff} A$ splývá s množinu všech afinních kombinací bodů z A.

Řekneme, že body $x_0, \dots, x_k \in \mathcal{A}_d$ jsou *afinně nezávislé*, jestliže vektory $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0$ jsou lineárně nezávislé.

Definice 1.1.

1. $K \subset \mathcal{A}_d$ je *konvexní*, jestliže pro všechna $x, y \in K$ a $t \in [0, 1]$ platí $(1 - t)x + ty \in K$.
2. *Konvexní obal* množiny $A \subset \mathcal{A}_d$ je množina
$$\operatorname{conv} A := \bigcap \{B \subset V_d : \ B \supset A : B \text{ konvexní}\}.$$
3. *Dimenzí* konvexní množiny $K \subset \mathcal{A}_d$ rozumíme dimenzi jejího konvexního obalu, tedy $\dim K := \dim(\operatorname{aff} K)$.
4. Množinu $\operatorname{conv}\{x_0, \dots, x_k\}$, kde $x_0, \dots, x_k \in \mathcal{A}_d$ jsou afinně nezávislé, nazýváme *k-simplexem*.
5. *Konvexní těleso* v $\mathbb{R}^d$ je neprázdná, konvexní a kompaktní množina.

Poznámka 1.1. Zřejmě $K \subset \mathcal{A}_d$ je konvexní právě tehdy, když

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x_1, \dots, x_n \in K)(\forall t_1, \dots, t_n \in [0,1]), \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \implies \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in K.$$

Lemma 1.1. *Mějme systém konvexních množin $K_\alpha \subset \mathcal{A}_d$, $\alpha \in I$. Pak*

1. *$\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha$ je rovněž konvexní,*
2. *je-li indexová množina I lineárně uspořádaná a systém (K_α) rostoucí (tzn. $K_\alpha \subset K_{\alpha'}$ kdykoliv $\alpha < \alpha'$), pak i $\bigcup_{\alpha \in I} K_\alpha$ je konvexní.*

Důkaz. Plyne snadno z definice. □

Lemma 1.2. *Pro libovolnou $A \subset \mathcal{A}_d$ platí*

$$\operatorname{conv} A = \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i x_i : t_i \geq 0, t_1 + \dots + t_k = 1, x_i \in A, i = 1, \dots, k, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Důkaz. Označme $\tilde{A}$ množinu na pravé straně dokazované rovnosti. Snadno se dokáže, že $\tilde{A}$ je konvexní, a navíc obsahuje A, tedy $\operatorname{conv} A \subset \tilde{A}$.

Pro důkaz opačné inkluze uvažujme nějakou konvexní nadmnožinu $K \supset A$. Pak podle Poznámky 1.1 K obsahuje i $\tilde{A}$. Platí tedy $\tilde{A} \subset \operatorname{conv} A$. □

Definice 1.2. *Uzavřený konvexní obal* množiny $A \subset \mathbb{R}^d$ definujeme jako

$$\overline{\operatorname{conv}} A := \bigcap \{B \subset \mathbb{R}^d : B \supset A, B \text{ konvexní uzavřená}\}.$$

Poznámka 1.2.

1. Pro $A \subset \mathbb{R}^d$ platí $\overline{\operatorname{conv}} A = \overline{\operatorname{conv} A}$. (Cvičení.)
2. Z uzavřenosti A neplyne uzavřenost $\operatorname{conv} A$. (Uvažujte sjednocení přímky a bodu.)
3. Je-li A kompaktní, pak je i $\operatorname{conv} A$ kompaktní. (Cvičení.)

Věta 1.3 (Caratheodory)**.** *Pro libovolnou množinu $A \subset \mathcal{A}_d$ platí*

$$\operatorname{conv} A = \left\{ \sum_{i=0}^{d} t_i x_i : t_i \geq 0, t_0 + \dots + t_d = 1, x_i \in A, i = 0, \dots, d \right\}.$$

Poznámka 1.3.

1. Ekvivalentně lze říci, že konvexní obal množiny A v $\mathcal{A}_d$ je sjednocením všech k-simplexů s vrcholy v A, $k \leq d$.

2. Počet $d + 1$ členů v konvexní kombinaci nelze obecně snížit (uvažujte d-simplex).

Důkaz. Označme symbolem $\tilde{A}$ množinu na pravé straně dokazované rovnosti. Zřejmě platí $\tilde{A} \subset \operatorname{conv} A$ (viz Lemma 1.2).

Dokážeme opačnou inkluzi. Buď $x \in \operatorname{conv} A$, podle Lemmatu 1.2 lze tedy x psát ve tvaru $x = \alpha_0 x_0 + \cdots + \alpha_k x_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_0 + \cdots + \alpha_k = 1$, $x_i \in A$. Předpokládejme, že k je nejmenší přirozené číslo, pro něž lze takové vyjádření nalézt. Stačí ukázat, že $k \leq d$. Nechť pro spor $k > d$. Zřejmě $\alpha_i > 0$ pro všechna i (členy s $\alpha_i = 0$ lze vynechat a snížit tak číslo k).

Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$t_0 x_0 + \cdots + t_k x_k = 0, \quad t_0 + \cdots + t_k = 0.$$

Jedná se o soustavu $d + 1$ rovnic (po rozpisu do souřadnic) pro $k + 1$ proměnných. Protože $k > d$, existuje netriviální řešení $(t_0, \ldots, t_k)$. Zřejmě $\min_i t_i < 0 < \max_i t_i$. Položme

$$\tau := \min \left\{ \frac{\alpha_i}{t_i} : t_i > 0 \right\} =: \frac{\alpha_{i_0}}{t_{i_0}} > 0$$

a

$$\beta_i := \alpha_i - \tau t_i, \quad i = 0, \ldots, k.$$

Zřejmě $0 = \beta_{i_0} \leq \beta_i$, $i = 0, \ldots, k$. Dále platí

$$\sum_{i=0}^{k} \beta_i = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i - \tau \sum_{i=0}^{k} t_i = 1,$$
$$\sum_{i=0}^{k} \beta_i x_i = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i - \tau \sum_{i=0}^{k} t_i x_i = x.$$

Tedy x lze vyjádřit jako konvexní kombinaci méně než $k + 1$ prvků, což je spor s předpokladem minimality k a důkaz druhé inkluze je tím hotov. □

Věta 1.4 (Radon). *Nechť množina $A \subset \mathcal{A}_d$ má aspoň $d + 2$ prvků. Pak existují disjunktní podmnožiny $R, B \subset A$ takové, že* $\operatorname{conv} R \cap \operatorname{conv} B \neq \emptyset$.

Poznámka 1.4. Hodnota $d + 2$ ve větě nemůže být snížena (uvažujte d-simplex).

Důkaz. Stačí uvažovat konečnou množinu $A = \{x_0, \dots, x_k\}$, $k > d$. Stejně jako v důkazu Caratheodoryho věty uvažjme soustavu $d+1$ lineárních rovnic o $k+1$ proměnných

$$t_0 x_0 + \dots + t_k x_k = 0, \quad t_0 + \dots + t_k = 0,$$

a buď $(t_0, \dots, t_k)$ její netriviální řešení. Označme

$$\begin{aligned} I &:= \{i : t_i > 0\}, \quad J := \{j : t_j < 0\}, \\ R &:= \{x_i : i \in I\}, \quad B := \{x_j : j \in J\}. \end{aligned}$$

Pak platí

$$x = \sum_{i \in I} \frac{t_i}{\sum_{i \in I} t_i} x_i = \sum_{j \in J} \frac{t_j}{\sum_{j \in J} t_j} x_j,$$

tedy $x \in \operatorname{conv} R \cap \operatorname{conv} B$. $\square$

Přednáška 24.2.2025

Věta 1.5 (Helly). *Buďte* $K_0, \dots, K_m \subset \mathcal{A}_d$ *konvexní,* $m \geq d$. *Nechť pro libovolné* $0 \leq i_0 < \cdots < i_d \leq m$ *je* $K_{i_0} \cap \cdots \cap K_{i_d} \neq \emptyset$. *Pak* $K_0 \cap \cdots \cap K_m \neq \emptyset$.

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle m Pro $m = d$ je tvrzení triviální. Buď $m > d$ dané a předpokládejme, že tvrzení platí pro $m - 1$. Tedy pro každé $0 \leq i \leq m$ existuje bod $p_i \in \bigcap_{j \neq i} K_j$. Pokud $p_i = p_k$ pro nějaké dva různé indexy i, k, pak bod $p_i = p_k$ leží v $\bigcap_{j=0}^m K_j$ a jsme hotovi. Nechť tedy naopak všechny body p_i jsou různé. Pak podle Radonovy věty existuje rozklad $\{0, \dots, m\} = I \cup J$ na disjunktní množiny I, J tak, že $\operatorname{conv}\{p_i : i \in I\} \cap \operatorname{conv}\{p_j : j \in J\} \neq \emptyset$. Buď p bod tohoto průniku. Protože $p_i \in \bigcap_{j \in J} K_j$ pro všechna $i \in I$ a množiny K_j (a tedy i jejich průnik) jsou konvexní, také $p \in \bigcap_{j \in J} K_j$. Analogickou úvahou zjistíme, že také $p \in \bigcap_{i \in I} K_i$, a tedy $p \in \bigcap_{i=0}^m K_i$. □

Důsledek 1.6. *Buď* $\{K_i : i \in I\}$ *systém kompaktních konvexních podmnožin* $\mathbb{R}^d$. *Nechť pro všechny* $i_0, \dots, i_d \in I$ *platí* $K_{i_0} \cap \cdots \cap K_{i_d} \neq \emptyset$. *Pak* $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$.

Důkaz. Podle Hellyho věty je $\bigcap_{i \in F} K_i \neq \emptyset$ pro každou konečnou množinu $F \subset I$. Neprázdnost průniku všech K_i je pak přímým důsledkem kompaktnosti: Vskutku, kdyby $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$, pak pro libovolné $i_0 \in I$ je

$$K_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R}^d \setminus K_i)$$

otevřené pokrytí, tedy existuje konečná $F \subset I$ taková, že $K_{i_0} \subset \bigcup_{i \in F} (\mathbb{R}^d \setminus K_i)$. Pak ale $K_{i_0} \cap \bigcap_{i \in F} K_i = \emptyset$, což je spor. □

Důsledek 1.7. *Buďte* $A_0, \dots, A_m \subset \mathbb{R}^d$ *konvexní,* $k \leq d + 1$ *a* L *lineární podprostor* $\mathbb{R}^d$ *dimenze* $d - k + 1$. *Nechť každých* k *množin* A_i *má neprázdný průnik. Pak existuje* $z \in \mathbb{R}^d$ *takový, že* $(L + z) \cap A_i \neq \emptyset$, $i = 0, \dots, m$.

Důkaz. Předně si uvědomme, že $(L + z) \cap A_i \neq \emptyset$ právě tehdy, když

$$z \in A_i \oplus L := \{a + b : a \in A_i, b \in L\}.$$

Stačí tedy dokázat, že $\bigcap_{i=0}^m (A_i \oplus L) \neq \emptyset$. Dále využijeme rovnosti

$$\bigcap_{i=0}^m (A_i \oplus L) = \bigcap_{i=0}^m (\tilde{A}_i \oplus L) = \left(\bigcap_{i=0}^m \tilde{A}_i \right) \oplus L,$$

kde $\tilde{A}_i$ je kolmá projekce množiny A_i do podprostoru $L^\perp$ kolmého k L. Nyní použijeme Hellyho větu v afinním prostoru $L^\perp$ dimenze $k-1$. Protože podle předpokladu má každých k množin z $\tilde{A}_0, \dots, \tilde{A}_m$ neprázdný průnik, je i $\tilde{A}_0 \cap \dots \cap \tilde{A}_m \neq \emptyset$. □

Důsledek 1.8 (Barycentrum míry)**.** *Pro každou borelovskou pravděpodobnostní míru μ na $\mathbb{R}^d$ existuje $y \in \mathbb{R}^d$ takový, že pro každý uzavřený poloprostor $H \subset \mathbb{R}^d$ je $\mu(H) \geq \frac{1}{d+1}$.*

Poznámka 1.5. Konstantu $\frac{1}{d+1}$ nelze zlepšit: uvažujte $\mu = \frac{1}{d+1}\delta_{x_0} + \dots + \frac{1}{d+1}\delta_{x_d}$ pro afinně nezávislé body $x_0, \dots, x_d \in \mathbb{R}^d$.

Důkaz. Označme

$$\mathcal{S} := \left\{ H \subset \mathbb{R}^d \text{ uzavř. poloprostor, } \mu(\mathbb{R}^d \setminus H) < \frac{1}{d+1}. \right\}.$$

Pro libovolné $H_0, \dots, H_d \in \mathcal{S}$ platí (ze subaditivity míry) $\mu(\bigcup_{i=0}^d (\mathbb{R}^d \setminus H_i)) < 1$, tedy $\bigcap_{i=0}^d H_i \neq \emptyset$. Podle Hellyho věty má tedy každý konečný neprázdný podsystém $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ neprázdný průnik. Ukážeme, že i $\bigcap \mathcal{S} \neq \emptyset$.

Zřejmě existuje konečně mnoho uzavřených podprostorů $H_1, \dots, H_m$ takových, že jejich průnik je omezená množina. Zvětšíme-li H_i posunem hraniční nadroviny, najdeme podprostor $H_i' \supset H_i$, $H_i' \in \mathcal{S}$, přitom průnik $B := H_1' \cap \dots \cap H_m'$ zůstane omezený, a tedy i kompaktní. Pak $\{B \cap H : H \in \mathcal{S}\}$ je systém kompaktních konvexních množin, v němž má každý konečný podsystém neprázdný průnik. Tedy i $\bigcap_{H \in \mathcal{S}} (B \cap H) = \bigcap_{H \in \mathcal{S}} H \neq \emptyset$.

Vyberme bod $y \in \bigcap_{H \in \mathcal{S}} H$. Je-li G otevřený poloprostor obsahující y, pak $\mathbb{R}^d \setminus G \notin \mathcal{S}$, a tedy $\mu(G) \geq \frac{1}{d+1}$. Je-li nyní H libovolný uzavřený poloprostor obsahující bod y, pak existují otevřené poloprostory $G_i \searrow H$, $y \in G_i$. Protože $\mu(G_i) \geq \frac{1}{d+1}$ pro každé i, také $\mu(F) \geq \frac{1}{d+1}$ ze spojitosti míry. □

Věta 1.9. *Pro každou neprázdnou kompaktní množinu $A \subset \mathbb{R}^d$ platí*

$$\operatorname{conv} A = \left\{ \int x \, d\mu(x) : \mu \textit{ borel. pravděp. míra, } \mu(A) = 1 \right\}.$$

Důkaz. (a) Je-li μ konečná kombinace Dirakových měr, $\mu = \alpha_1 \delta_{x_1} + \dots + \alpha_k \delta_{x_k}$ (nutně $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$), pak

$$\int x \, d\mu(x) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \in \operatorname{conv} A.$$

Je tedy $\operatorname{conv} A \subset \tilde{A}$, kde $\tilde{A}$ je množina na pravé straně dokazované identity.

(b) K libovolné borelovské pravděpodobnostní míře μ na A najdeme posloupnost μ_n konečných kombinací Diracových měr takovou, že $\int x\, d\mu_n(x) \to \int x\, d\mu(x)$, $n \to \infty$. Tím bude dokázána druhá inkluze, protože $\operatorname{conv} A$ je uzavřená. Nechť C_0 je kvádr obsahující A a pro $n \in N$ zvolme rozklad $C = C_{n,1} \cup \cdots \cup C_{n,k_n}$ takový, že $\operatorname{diam} C_{n,j} \leq \frac{1}{n}$, $j = 1, \ldots, k_n$. Zvolme body $p_{n,j} \in C_{n,j}$ a položme

$$\mu_n = \mu(C_{n,1})\delta_{p_{n,1}} + \cdots + \mu(C_{n,k_n})\delta_{p_{n,k_n}}.$$

Pak platí

$$\begin{aligned}
\left\| \int x\, d\mu_n(x) - \int x\, d\mu(x) \right\| &\leq \sum_{j=1}^{k_n} \left\| \mu(C_{n,j}) p_{n,j} - \int_{C_{n,j}} x\, d\mu(x) \right\| \\
&= \sum_{j=1}^{k_n} \left\| \int_{C_{n,j}} (p_{n,j} - x)\, d\mu(x) \right\| \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k_n} \mu(C_{n,j}) = \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

čímž je důkaz ukončen. □

Přednáška 3.3.2025

Důsledek 1.10 (Caratheodoryho věty)**.** *Pro libovolné $k, d \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ a $c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{R}^d$ tak, že*

$$\|x\|^{2k} = \sum_{i=0}^{m} \langle c_i \cdot x \rangle^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Důkaz. Označme $H_{2k,d}$ vektorový prostor všech homogenních polynomů stupně $2k$ v d reálných proměnných $(x_1, \ldots, x_d)$. Prvek $h \in H_{2k,d}$ je tvaru

$$h(x) = h(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{i_1+\cdots+i_d=2k} a_{i_1,\ldots,i_d} x_1^{i_1} \ldots x_d^{i_d}.$$

$H_{2k,d}$ je vektorový prostor dimenze $\binom{d+2k-1}{2k}$ (počet $(2k)$-prvkových kombinací s opakováním z d prvků). Pro libovolný $c \in S^{d-1} := \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| = 1\}$ označme $h_c(x) := \langle c, x\rangle^{2k}$; zřejmě $h_c \in H_{2k,d}$. Dále buď $K := \{h_c : c \in S^{d-1}\}$ (uzavřená podmnožina $H_{2k,d}$), μ rotačně invariantní pravděpodobnostní míra na S^{d-1} a

$$h := \int h_c \, d\mu(c) \in \operatorname{conv} K.$$

Protože h je rotačně invariantní polynom stupně $2k$, musí být tvaru

$$h(x) = \gamma \|x\|^{2k}$$

pro nějaké $\gamma > 0$. Podle Caratheodoryho věty pak je pro $m = \binom{d+2k-1}{2k} + 1$

$$h = \alpha_0 h_{c_0} + \cdots + \alpha_m h_{c_m}$$

pro vhodné $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_0 + \cdots + \alpha_m = 1$ a $c_i \in S^{d-1}$. Je tedy

$$\gamma \|x\|^{2k} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \langle c_i, x\rangle^{2k},$$

což je ekvivalentní dokazovanému vztahu.

□

2 Opěrné a oddělovací věty

Věta 2.1. *Buď $A \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná, konvexní a uzavřená. Pak ke každému bodu $y \in \mathbb{R}^d$ existuje právě jeden bod $\Pi_A(y) \in A$ splňující*

$$\|\Pi_A(y) - y\| = \operatorname{dist}(y, A) := \inf_{x \in A} \|y - x\|.$$

Zobrazení $y \mapsto \Pi_A(y)$ se nazývá *metrická projekce* na A.

Důkaz. Je-li $y \in A$, pak samozřejmě $\Pi_A(y) = y$. Nechť $y \notin A$ a zvolme pevně nějaké $R > \operatorname{dist}(y, A)$. . Protože zobrazení $x \mapsto \|y - x\|$ je spojité, nabývá svého minima na kompaktní množině $A \cap B(y, R)$. Ukážeme, že bod minima je jediný.

Nechť pro spor existují dva body $x_1 \neq x_2$ z množiny A takové, že $\|x_1 - y\| = \|x_2 - y\| = \operatorname{dist}(y, A)$. Bod $x := \frac{x_1+x_2}{2}$ leží také v konvexní množině A, přitom ale $\|x - y\| < \|x_1 - y\| = \operatorname{dist}(y, A)$ (výška v rovnoramenném trojúhelníku je kratší než odvěsny), což je spor. $\square$

Definice 2.1. Jsou-li $A \subset \mathbb{R}^d$ konvexní uzavřená a H uzavřený poloprostor $\mathbb{R}^d$ s hraniční nadrovinou $E := \partial H$ takové, že $A \subset H$ a $A \cap E \neq \emptyset$, říkáme, že:

1. E je *opěrná nadrovina* množiny A,
2. H je *opěrný poloprostor* množiny A,
3. $E \cap A$ je *opěrná množina* množiny A.

Poznámka 2.1. *Opěrná množina je zřejmě konvexní množina dimenze menší než d.*

Věta 2.2. *Buď $A \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná, konvexní uzavřená a $y \in \mathbb{R}^d \setminus A$. Pak nadrovina E procházející bodem $\Pi_A(y)$ a kolmá k $y - \Pi_A(y)$ je opěrnou nadrovinou A, a poloprostor s hranicí E a neobsahující bod y je opěrným poloprostorem A.*

Důkaz. Zřejmě $a := \Pi_A(y) \in A \cap E \neq \emptyset$, stačí tedy ukázat, že $A \subset H$. Nechť pro spor existuje bod $x \in A \setminus H$. Pak úhel $\angle(yax) < \frac{\pi}{2}$. Pokud $\angle(yxa) \geq \frac{\pi}{2}$, položme $z := x$, v opačném případě zvolme za z kolmou projekci bodu y na polopřímku $\{a + tx : t > 0\}$. Vzhledem ke konvexitě je $z \in A$. V trojúhelníku s vrcholy y, a, z je pak v obou případech $\sin \angle(yaz) < \sin \angle(yza)$, tedy $\|y - z\| < \|y - a\|$ podle sinové věty. To je ale spor s vlastností $a = \Pi_A(y)$. $\square$

Důsledek 2.3. *Každá neprázdná konvexní uzavřená vlastní podmnožina $A \subset \mathbb{R}^d$ je průnikem všech uzavřených poloprostorů, které ji obsahují. Zároveň A je průnikem všech svých opěrných poloprostorů.*

Lemma 2.4. *Buď $A \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná, konvexní uzavřená. Pak*

$$\|\Pi_A(y) - \Pi_A(x)\| \leq \|y - x\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

(Jinými slovy, metrická projekce je 1-Lipschitzovská.)

Důkaz. Označme $a := \Pi_A(x)$ a $b := \Pi_A(y)$. Je-li $a = b$, nerovnost zřejmě platí. Nechť tedy $a \neq b$ a označme ϕ kolmou projekci z $\mathbb{R}^d$ na přímku procházející body a, b. Bod x ani y nemůže ležet ve "vrstvě" $S := \phi^{-1}((a,b))$ (kdyby například $x \in S$, pak by bod $\phi(x) \in (a,b) \subset A$ ležel blíže od x než $a = \Pi_A(x)$, což by byl spor). Úsečka $[x,y]$ tedy protíná obě rovnoběžné nadroviny $\phi^{-1}(a)$ a $\phi^{-1}(b)$ ležící ve vzdálenosti $\|b-a\|$, tedy nutně $\|x-y\| \geq \|b-a\|$. □

Věta 2.5 (Support Theorem)**.** *Každým hraničním bodem neprázdné konvexní uzavřené podmnožiny $\mathbb{R}^d$ prochází opěrná nadrovina.*

Důkaz. Zvolme $a \in \partial A$ a posloupnost bodů $x_k \in \mathbb{R}^d \setminus A$, $x_k \to a$. Označme $a_k := \Pi_A(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Podle předchozího lemmatu je

$$\|a - a_k\| = \|\Pi_A(x_k) - \Pi_A(a)\| \leq \|x_k - a\| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Položme $y_k := a_k + \frac{x_k - a_k}{\|x_k - a_k\|}$. Z Věty 2.2 plyne, že $\Pi_A(y_k) = \Pi_A(x_k) = a_k$ (nadrovina procházející bodem a_k a kolmá k $[x_k, a_k]$ je opěrná). Posloupnost (y_k) je zřejmě omezená, tedy má konvergentní podposloupnost $y_{k_n} \to y$. Dále platí $\operatorname{dist}(y, A) = \lim_k \operatorname{dist}(y_{n_k}, A) = 1$, tedy $y \notin A$. Ze spojitosti metrické projekce plyne $a_{n_k} = \Pi_A(y_{n_k}) \to \Pi_A(y)$, zároveň ale $a_{n_k} \to a$, tedy $a = \Pi_A(y)$. Pak ovšem bodem a prochází opěrná madrovina podle Věty 2.2. □

Přednáška 10.3.2025

Věta 2.6 (Separation Theorem)**.** *Buďte $A \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná konvexní uzavřená a $K \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná konvexní a kompaktní, $A \cap K = \emptyset$. Pak existuje nadrovina E ostře oddělující A od K (tzn., že A a K jsou obsaženy v opačných otevřených poloprostorech s hranicí E).*

Důkaz. Množina $A - K := \{a - b : a \in A, b \in K\}$ je neprázdná, konvexní a uzavřená a neobsahuje počátek. Podle Věty 2.2 tedy existuje nadrovina E ostře oddělující $A - K$ od 0. Nechť $E = \{x : \langle x, u\rangle = \alpha\}$ pro nějaký jednotkový vektor u a $\alpha > 0$, tedy pro všechna $a \in A$ a $b \in K$ platí $\langle a - b, u\rangle > \alpha$. Protože K je kompaktní, existuje

$$\beta := \langle b_0, u\rangle = \max_{b\in K}\langle b, u\rangle.$$

Pak pro všechna $a \in A$ je

$$\langle a, u\rangle > \alpha + \langle b_0, u\rangle = \alpha + \beta.$$

Například nadrovina $\{x : \langle x, u\rangle = \frac{\alpha}{2} + \beta\}$ tedy ostře oddělue množiny A a K. ☐

Definice 2.2. Množina $P \subset \mathbb{R}^d$ je *polytop*, lze-li P zapsat jako konvexní obal konečné množiny bodů. Je-li $P = \operatorname{conv} F$, F konečná, řekneme, že bod $v \in F$ je *vrcholem* P, jestliže $v \notin \operatorname{conv}(F \setminus \{v\})$. Každou opěrnou množinu polytopu P nazveme *stěnou* P.

Poznámka 2.2. Lze snadno ukázat, že definice vrcholu polytopu nezávisí na volbě generující konečné množiny. Dále je vidět, že stěny dimenze 0 jsou tvořeny právě vrcholy polytopu.

Lemma 2.7. *Nechť je dán polytop $P = \operatorname{conv} V$ s (konečnou) množinou vrcholů V a nechť F je stěna P. Pak $F = \operatorname{conv}(V \cap F)$.*

Důkaz. Nechť $P \subset \{x : \langle x, u\rangle \le \alpha\}$ a $F = P \cap \{x : \langle x, u\rangle = \alpha\}$ pro vhodné $u \in S^{d-1}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Inkluze $\operatorname{conv}(V \cap F) \subset F$ je zřejmá. Nechť je dán bod $x \in F$. Protože $x \in P$, můžeme psát $x = \sum_{v\in V} \alpha(v)v \in P$ s koeficienty $\alpha(v) \ge 0$, $\sum_{v\in V} \alpha(v) = 1$. Jelikož $x \in F$, platí

$$\alpha = \langle x, u\rangle = \sum_{v\in V} \alpha(v)\langle v, u\rangle = \sum_{v\in V\cap F} \alpha(v)\langle v, u\rangle + \sum_{v\in V\setminus F} \alpha(v)\langle v, u\rangle.$$

Protože $\langle v, u\rangle < \alpha$ kdykoliv $v \notin F$, musí být příslušné kouficienty $\alpha(v) = 0$, a tedy $x = \sum_{v\in V\cap F} \alpha(v)v \in P$. ☐

Definice 2.3. $P \subset \mathbb{R}^d$ je *mnohostěn* (polyhedron), lze-li P zapsat jako průnik konečně mnoha uzavřených poloprostorů.

Věta 2.8. *Každý polytop je omezený polyhedron.*

Důkaz. Buď $P = \operatorname{conv} V$ polytop s množinou vrcholů V. Předpokládejme nejprve, že $\dim P = d$, tedy P má vnitřní bod y. Podle předchozího Lemmatu 2.7 má P konečný počet stěn $F_1, \ldots, F_k$. K těmto stěnám existují opěrné polorostory $H_1, \ldots, H_k$ takové, že $F_i \subset \partial H_i$, $i = 1, \ldots, k$. Uvažujme polyhedron $M := H_1 \cap \cdots \cap H_k$. Zřejmě platí $P \subset M$. Ukážeme, že také $M \subset P$. Nechť pro spor existuje bod $x \in M \setminus P$. Úsečka $[xy]$ musí protnout hranici ∂P v nějakém bodě z. Podle Věty 2.2 prochází bodem z opěrná nadrovina polytopu P, a tedy z leží v nějaké stěně F_i. Příslušný opěrný poloprostor H_i pak nutně obsahuje bod y a nemůže tedy obsahovat bod x, tedy $x \notin H_i \supset M$, což je spor.

Je-li $\dim P < d$, vyjádříme nejprve afinní obal $A := \operatorname{aff} P$ jako průnik konečně mnoha uzavřených poloprostorů $Q_1 \cap \ldots Q_m$. Dále podle první části důkazu víme, že $P = H'_1 \cap \cdots \cap H'_k$ pro uzavřené poloprostory $H'_1, \ldots, H'_k$ v A. Pak $H_i := H'_i \oplus A^{\perp}$ ($A^{\perp}$ je kolmý podprostor k A) jsou uzavřené poloprostory $\mathbb{R}^d$ a platí $P = Q_1 \cap \ldots Q_m \cap H_1 \cap \cdots \cap H_k$. $\square$

Přednáška 17.3.2025

3 Extremální body

Definice 3.1. Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$ je konvexní a uzavřená. Bod $x \in A$ je *extremálním bodem* A, jestliže x nelze vyjádřit jako netriviální konvexní kombinaci bodů z A (tedy jestliže $x = (1-t)y + tz$ pro nějaké $y, z \in A$ a $t \in (0,1)$, pak $x = y = z$). Množinu všech extremálních bodů množiny A značíme $\operatorname{ext} A$.

Pozn.:

1. $x \in \operatorname{ext} A$ právě tehdy, když $A \setminus \{x\}$ je konvexní.
2. Extremálními body polytopu jsou právě všechny jeho vrcholy.
3. $\operatorname{ext} A \neq \emptyset$ právě tehdy, když A neobsahuje žádnou přímku.
4. Je-li $\{x\}$ opěrnou množinou A, je x extremálním bodem. Opačná implikace neplatí.

Věta 3.1 (Krein-Milman)**.** *Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je konvexní a kompaktní a $A \subset K$. Pak*

$$K = \operatorname{conv} A \iff A \supset \operatorname{ext} K.$$

Speciálně platí $K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K)$.

Důkaz. A. Nechť $K = \operatorname{conv} A$ a $x \in \operatorname{ext} K$. Pokud by x neležel v A, pak $A \subset K \setminus \{x\}$, tedy $\operatorname{conv} A \subset K \setminus \{x\}$, což by byl spor, tedy nutně $x \in A$.

B. Pro opačnou inkluzi stačí ukázat, že $K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K)$. Důkaz provedeme indukcí podle dimenze prostoru d. Je-li $d = 1$, pak $K = [a, b]$ a $\operatorname{ext} K = \{a, b\}$, rovnost tedy zřejmě platí. V indukčním kroku budeme předpokládat, že rovnost platí ve všech dimenzích menších než d, a mějme konvexní kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^d$ a bod $x \in K$. Buď g libovolná přímka procházející bodem x. Označme $g \cap K =: [y, z]$ (jedná se o kompaktní konvexní podmnožinu přímky, tedy interval). Body y, z zřejmě leží na hranici K, tedy podle Support Theorem jimi procházejí nějaké opěrné nadroviny E_y, E_z, a budte $K_y := K \cap E_y$, $K_z := K \cap E_z$ příslušně opěrné množiny. Jedná se množiny dimenze menší než d, tedy podle indukčního předpokladu je $K_y = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K_y)$ a $K_z = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K_z)$. Dále platí $\operatorname{ext} K_y \subset \operatorname{ext} K$ a $\operatorname{ext} K_z \subset \operatorname{ext} K$ (skutečně, je-li např. $p \in \operatorname{ext} K_y$, $p = (1-\alpha)q + \alpha w$ pro $q, w \in K$ a $\alpha \in (0,1)$, pak nutně $q, w \in E_y$, a tedy $q = w$). Dostáváme tedy

$$x \in [y, z] \subset \operatorname{conv}(\operatorname{conv}(\operatorname{ext} K_y) \cup \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K_z)) \subset \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K).$$

$\square$

Důsledek 3.2. *Pro konvexní a kompaktní množinu $P \subset \mathbb{R}^d$ platí: P je polytop právě tehdy, když* $\operatorname{ext} P$ *je konečná.*

Věta 3.3 (Weyl-Minkowski, druhá část)**.** *Každý omezený mnohostěn v $\mathbb{R}^d$ je polytop.*

Důkaz. Buď $P = \bigcap_{i=1}^{k} H_i$ omezený mnohostěn. Ukážeme, že množina $\operatorname{ext} P$ je konečná. Buď $x \in \operatorname{ext} P$. Položme

$$A_i := \begin{cases} E_i := \partial H_i & \text{pokud } x \in E_i, \\ \operatorname{int} H_i & \text{pokud } x \notin E_i, \end{cases}$$

a $D := \bigcap_{i=1}^{k} A_i$. Zřejmě $x \in D \subset P$ a množina D je konvexní a relativně otevřená (tzn. otevřená v $\operatorname{aff} D$), tedy $\dim D = 0$ (jinak by nemohla obsahovat extremální bod), tudíž $D = \{x\}$. Protože podle konstrukce existuje jen konečně mnoho takovýchto množin D, musí být množina $\operatorname{ext} P$ konečná. $\square$

Definice 3.2. Bod $x \in A$ uzavřené konvexní množiny $A \subset \mathbb{R}^d$ nazveme *exponovaným bodem* A, jestliže $\{x\}$ je opěrná množina A. Množinu všech exponovaných bodů množiny A značíme $\exp A$.

Poznámka 3.1. Zřejmě $\exp A \subset \operatorname{ext} A$. Obrácená inkluze obecně neplatí, např. $0 \in \operatorname{ext} A \setminus \exp A$ pro $A = [0,1]^2 \cup B((0, \frac{1}{2}), \frac{1}{2})$.

Věta 3.4 (Straszewicz)**.** *Pro $K \subset \mathbb{R}^d$ konvexní kompaktní platí*

$$K = \overline{\operatorname{conv}}(\exp K).$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že K má alespoň dva body. Z kompaktnosti K snadno plyne, že ke každému bodu $x \in \mathbb{R}^d$ existuje bod $y_x \in K$ takový, že

$$\|y_x - x\| = \max_{y \in K} \|y - x\|.$$

Nadrovina E_x procházející bodem y_x a kolmá k $y_x - x$ je zřejmě opěrnou nadrovinou K a platí $K \cap E_x = \{y_x\}$ (jinak by bod y_x nebyl nejvzdálenější od x v K), tedy $y_x \in \exp K$. Označme $\hat{K} := \overline{\operatorname{conv}}\{y_x : x \in \mathbb{R}^d\}$. $\hat{K}$ je konvexní kompaktní podmnožinou K. Ukážeme, že $\hat{K} = K$ (z čehož samozřejmě plyne tvrzení).

Nechť pro spor existuje bod $x \in K \setminus \hat{K}$. Pak nadrovina E' procházející bodem $x' := \Pi_{\hat{K}}(x)$ a kolmá k $x' - x$ je opěrnou nadrovinou $\hat{K}$. Buď $R := \operatorname{diam} \hat{K}$. Zvolme $t > 0$ tak velké, aby

$$t + \|x - x'\| > \sqrt{t^2 + R^2}.$$

Pak pro bod

$$z := x' + t\frac{x' - x}{\|x' - x\|}$$

platí

$$\|z - x\| > \max_{y \in \hat{K}} \|z - y\|,$$

tedy i $\|z - x\| > \|z - y_z\|$, což je ve sporu s definicí $y_z \in \hat{K}$. $\square$

Přednáška 24.3.2025

Příklad 3.1 (Problém diet)**.** Jedná se o problém lineárního programování, který je obecně tvaru

$$\min\{\langle x, u\rangle : x \in P\}, \quad P \text{ mnohostěn.}$$

Uvažujeme n složek potravy s cenami $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ za jednotku, a m živin, přitom j-tá složka potravy obsahuje množství α_{ij} i-té živiny na jednotku. Úkolem je sestavit nejlevnější dietu obsahující složky v množství $\xi_1, \dots, \xi_n$ tak, aby obsahovala celkové množství β_i i-té živiny. Mnohostěn P je tedy určen podmínkami

$$\begin{aligned} \alpha_{i1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{in}\xi_n = \beta_i, &\quad i = 1, \dots, m, \\ \xi_j \geq 0, &\quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

a minimalizovanou funkcí je funkce ceny

$$\langle \xi, \gamma\rangle = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \xi_j.$$

Zřejmě $\dim P \geq n - m$. Řešení ξ můžeme najít mezi extremálními body ($\xi \in \operatorname{ext} P$) a musí být určeno alespoň n rovnicemi odpovídajícími hraničním nadrovinám mnohostěnu P, tedy aspoň $n - m$ souřadnic ξ_j musí být rovno nule.

4 Dualita

Definice 4.1. Pro $A \subset \mathbb{R}^d$ neprázdnou značíme

$$A^o := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, y\rangle \leq 1, \, y \in A\}$$

duální (polární) množinu k množině A.

Pozn.:

1. A^o je konvexní uzavřená, $0 \in A$.
2. $(\mathbb{R}^d)^o = \{0\}$, $\{0\}^o = \mathbb{R}^d$.
3. $A \subset B \implies B^o \subset A^o$.

4. $(\bigcup_i A_i)^o = \bigcap_i A_i^o$.

5. $(tA)^o = \frac{1}{t} A^o$, $t > 0$.

6. $L \subset \mathbb{R}^d$ lineární podprostor $\implies L^o = L^\perp$.

7. Je-li $P = \operatorname{conv}\{y_1, \dots, y_m\}$ polytop, je

$$P^o = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, y_i \rangle \leq 1,\, i = 1, \dots, m\}$$

mnohostěn.

8. $A \subset (A^o)^o =: A^{oo}$.

Věta 4.1 (Bipolární věta)**.** *Nechť* $A \subset \mathbb{R}^d$ *je konvexní uzavřená,* $0 \in A$. *Pak*

$$A^{oo} = A.$$

Důkaz. Víme, že $A \subset A^{oo}$. Dokážeme obrácenou inkluzi. Nechť pro spor neplatí a existuje bod $y \in A^{oo} \setminus A$. Pak existuje nadrovina $E := \{x : \langle x, u \rangle = \alpha\}$ ostře oddělující y od A, tedy např. $\langle y, u \rangle > \alpha$ a $\langle x, u \rangle < \alpha$, $x \in A$. Protože $0 \in A$, musí být $\alpha > 0$. Položme $v := \frac{1}{\alpha} u$. Pak pro všechny body $x \in A$ platí $\langle x, v \rangle < 1$, tedy $v \in A^o$. Dále je $\langle y, v \rangle = \frac{1}{\alpha} \langle y, u \rangle > 1$, tedy $y \notin A^{oo}$, což je spor. $\square$

Cvičení 4.1. Pro $A \neq \emptyset$ platí

$$A^{oo} = \overline{\operatorname{conv}}(A \cup \{0\}).$$

Příklad 4.1.

1. Pro mnohostěn $A = \{x : x \cdot u_i \leq 1,\, i = 1, \dots, m\}$, platí

$$A^o = \operatorname{conv}\{0, u_1, \dots, u_m\},$$

tedy A^o je polytop.

2. $B(0, \rho)^o = B(0, \frac{1}{\rho})$.

3. $\left([-1, 1]^d\right)^o = \{x : |x^1| + \cdots + |x^d| \leq 1\}$.

4. $\{x : \|x\|_p \leq 1\}$ a $\{x : \|x\|_q \leq 1\}$ jsou vzájemně duální, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zde $\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_d|^p)^{1/p}$.

Definice 4.2. Množina $C \subset \mathbb{R}^d$ je *kužel* (s vrcholem v počátku), jestliže $tC = C, t > 0$. Symbolem $C(A)$ značíme nejmenší kužel obsahující neprázdnou množinu $A \subset \mathbb{R}^d$.

Poznámka 4.1. Je-li $C \subset \mathbb{R}^d$ neprázdný kužel, pak C^o je konvexní uzavřený kužel

$$C^o = \{x : x \cdot y \leq 0,\, y \in C\}.$$

Věta 4.2. *Nechť $e \in S^{d-1}$, $H = e^\perp$ nadrovina, $K \subset H$ neprázdná. Pak*

$$K^o \cap H = (C(K+e)^o \cap (H-e)) + e \subset H.$$

Důkaz. Duální množina ke kuželu $C(A)$ generovanému množinou A má tvar

$$C(A)^o = \{y : \langle y, a\rangle \leq 1,\, a \in C(A)\} = \{y : \langle y, a\rangle \leq 0,\, a \in A\}.$$

V našem případě tedy dostaneme

$$C(K+e)^o = \{y : \langle y, x+e\rangle \leq 0,\, x \in K\},$$

$$\begin{aligned} C(K+e)^o \cap (H-e) &= \{y : \langle y, x+e\rangle \leq 0,\, x \in K,\, \langle y, e\rangle = -1\} \\ &= \{y : \langle y, e\rangle = -1,\, \langle y, x\rangle \leq 1,\, x \in K\}. \end{aligned}$$

Protože $K \subset H$, je $\langle x, e\rangle = 0$ pro všechny $x \in K$, a tedy

$$\begin{aligned} (C(K+e)^o \cap (H-e)) + e &= \{z : \langle z, e\rangle = 0,\, \langle z, x\rangle \leq 1,\, x \in K\} \\ &= K^o \cap H. \end{aligned}$$

$\square$