

Dirichletovy formy na mrizi a nektare jejich aplikace v teorii pravdepodobnosti a statistické fyzice

Milos Zahradnik. Abstract

Dirichletova forma na prostoru R^Λ , kde Λ je nejaka konecna analogie d -rozmerne mrize Z^d , $d = 2, 3$ - napriklad torus - je definovana jako kvadraticka forma nasledujiciho typu, kde sumace je pres vsechny nejbližsi sousedy $\{i, j\}$ na dane mrizi Λ

$$H_D(x) = \sum_{\{i,j\}} (x_i - x_j)^2$$

Tato forma, a pripadna její zobecnění s vhodne volenými pozitivně semidefinitními koeficienty a_{ij} je diskretní analogii integrálu z kvadrátu gradientu, což je jeden ze základních objektů tradiční teorie potenciálu a harmonických funkcí. Formulace problému na mrizi zde umožňuje maximálně zjednodušit, v této diskretní situaci, technické otázky predmetu "Pravdepodobnost a potenciál" což je zkoumání harmonických funkcí metodou "drahových integrálu" tedy "integraci pres Brownův pohyb" resp. - ve zde uvazovaném zjednodušení - sumaci pres nahodné procházky.

Takovato kvadraticka forma je i startovacím objektem kvantové teorie pole. Motivaci budiz i argument, že "nic jednoduššího/základnějšího na nekonečné mrizi Z^d vlastně ani nevymyslíte". Jde pak ale přesto (zvláště když tento objekt začneme perturbovat :) o dostatečně složitý objekt matematické a teoretické fyziky. Některé vlastnosti tohoto objektu jsou však elementární a důležité a o nich bude tato přednáška. Jako prvotní motivaci můžeme vzít základní ideu teorie potenciálu: zkoumat chování harmonické funkce v oblasti $\Omega \subset R^d$ při zadaných okrajových podmínkách na $\partial\Omega$.

My to zde zobecníme -v diskretním přiblížení- na následující situaci: Místo "hard" okrajové podmínky na okraji $\partial\Omega$ množiny Ω zvolíme "soft" podmínku definovanou nějakou zadanou konfigurací $y \in R^\Lambda$ (tedy na celé naší mrizi Λ , nejen vne nějaké zadané podmnožiny mrize !) a "pripevníme" konfiguraci x k této "soft" okrajové podmínce y pomocí vhodného pomocného kvadratického výrazu $\sum \alpha_i (x_i - y_i)^2$. Naše základní úloha teď zní: Zkoumejme minimum kvadraticko lineárního výrazu

$$H_y(x) = H_D(x) + \sum_{i \in \Lambda} \alpha_i (x_i - y_i)^2$$

charakterizujeme vlastnosti minimalizující konfigurace $\bar{x}$ a najdeme efektivní vzorec pro hodnotu $H_y(\bar{x}) = \min_x H_y(x)$. Pro "tvrdé" okrajové podmínky typu $\alpha_i = \infty, i \in M$ na předepsané podmnožině $M \subset \Lambda$ a $\alpha_i = 0, i \in \Lambda \setminus M$ pak námi odvozené vzorce dávají tradiční, efektivní "energetický" přístup ke zkoumání otázek, jako je pravdepodobnost návratu nahodné procházky na mrizi apod.

Pro konstantni α_i , a to je naše (možná i nová?) myšlenka pak vyjde $\bar{x}$ jako konvoluce konfigurace y s Yukawovým (resp. Coulombovým pro $\alpha_i \equiv 0$ pozn. tato označení mají smysl v dimenzi $d = 3$) potenciálem cíli dostáváme tím i efektivní metodu zhlazení konfigurace y pomocí minimalizace kvadraticko lineární formy $H_y(x)$. Poznámka. Tohle by mohlo mít zajímavé interpretace a aplikace např. i v teorii image processing.

Studujeme tedy kvadraticko lineární formu s "mekkou" okrajovou podmínkou y

$$H_y(x) = H_D(x) + \sum_{i \in \Lambda} \alpha_i (x_i - y_i)^2$$

a budeme minimalizovat tuto formu metodou "doplňení na čtverec". Provedením vcelku primocarych algebraických úprav s příslušnými "Laplaceovými" maticemi dostaneme nakonec elegantní vyjádření minima $H_y(\bar{x}) = \min_x H(x)$ takoveto kvadraticko lineární formy pomocí "drahového" integrálu tedy sumy elegantního, nového typu

$$H_y(\bar{x}) = \min_x H_y(x) = \sum_P w_P (y_b - y_e)^2$$

kde sumace je přes všechny cesty P (říkáme jim "orbity") na dané mříži, $b = b(P)$ resp. $e = e(P)$ je začátek resp. konec příslušné cesty a w_P je "váha" (v klasickém případě "tvrdých" okrajových podmínek je to součin "přechodových pravděpodobností") příslušné cesty P . Takovato explicitní vyjádření pro minimalizující konfigurace $\bar{x}$ a pro $H_y(\bar{x})$ jsou velmi užitečná v aplikacích.

Příklad: Ve statistické fyzice se zkoumají systémy Isingova typu se "spojitým spinem" s jednospinovým potenciálem U typu "double well". Pokud vezmeme speciální, "polygaussovskou" formu takového potenciálu U typu "multiple well"

$$\exp(-U(s)) = \sum_{k \in K} \exp(-U_k(s)) \quad s \in R$$

kde na pravé straně jsou gaussovske funkce, dostáváme efektivní metodu studia fázových přechodů systému se spojitým spinem a takovýmto "potenciálem" U (pozn. zde omluva za toto dvojí, zcela odlišné leč v obou případech v literatuře velmi tradiční použití slova potenciál :). Roznasobením závorek ve vzorci pro partiční sumu totiž převedeme, pomocí formulí pro výpočet gaussovských integrálů zkoumaní daného modelu do situace, kde se pracuje s diskretním prostorem spinu K

Praha 7. října 2025