Sada 1

1. Vyřešte následující rovnice

   (a) $|x| + |x+1| = 3$
   (b) $3^{x+1} = 9 \cdot 3^x - 18$
   (c) $\log(x^2+1) = 2\log(3-x)$
   (d) $\sin 2x = \cos x$
   (e) $|1-x| + 2\,|x+2| = 3(x+1)$
   (f) $2^{4-x} = 10 - 2^x$
   (g) $2\log_2(x-1) = \log_2(3x-7)+1$
   (h) $1 - |\sin x| = \cos^2 x$
   (i) $||x| - |x-5|| = 3$
   (j) $3^{2x+1} - 9 = 6 \cdot 3^x$
   (k) $|\log x| + |\log(ex)| = 3$
   (l) $2\sin x + \cos x = 1$

2. Vyřešte následující nerovnice

   (a) $\dfrac{x-1}{2x-6} \geq 1$
   (b) $\log_{1/4}(x^2 - x - 5) \leq 0$
   (c) $|x+2| + |x+3| < 4x - 2$
   (d) $\dfrac{x+2}{x+3} > \dfrac{2x+3}{x+6}$
   (e) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^3} > \dfrac{1}{9}$
   (f) $|x-1| - |x+1| < |x| + 3$
   (g) $|\tan x| < 1$
   (h) $\left|\sin(4e^{2x})\right| + \left|\log(\log x + x^{86})\right| < 0$

3. Načtrtněte grafy následujících funkcí

   (a) $f(x) = |4\sin(3x+3\pi) - 2| + 3$
   (b) $g(x) = \left|-2 \cdot 3^{2x+5} + 6\right|$

4. Řešte v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$

   (a) $-1 < \alpha e^x \leq 0$
   (b) $|\cos x| > \alpha$
   (c) $\alpha x^2 + 2\alpha x = x + 2$
   (d) $|x+3| + |x-1| = \alpha x - 2$

5. Vyjádřete $\sin 4x$ a $\cos 4x$ pomocí funkcí $\sin x$ a $\cos x$ (a jejich mocnin).

6. Dokažte

   (a) vzorec pro řešení kvadratické rovnice,
   (b) $|x+y| \leq |x| + |y|$, kde $x, y \in \mathbb{R}$,
   (c) rovnost
   $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$
   kde $0 < k < n$ jsou přirozená.

Sada 1 - výsledky

1. Rovnice

   (a) $x \in \{-2, 1\}$

   (b) $x = 1$

   (c) $x = \frac{4}{3}$

   (d) $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

   (e) $x \in [1, \infty]$

   (f) $x \in \{1, 3\}$

   (g) $x \in \{3, 5\}$

   (h) $x \in \{\frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$

   (i) $x \in \{1, 4\}$

   (j) $x = 1$

   (k) $x \in \{e, e^{-2}\}$

   (l) $x \in \{\pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2k\pi, 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

2. Nerovnice

   (a) $x \in (3, 5]$

   (b) $x \in (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$

   (c) $x \in (7/2, \infty)$

   (d) $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$

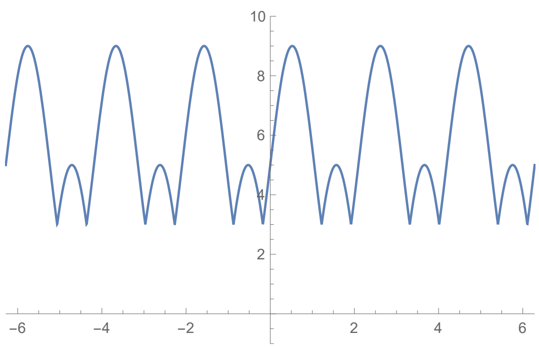
   (e) $x \in (-\infty, \sqrt[3]{2})$

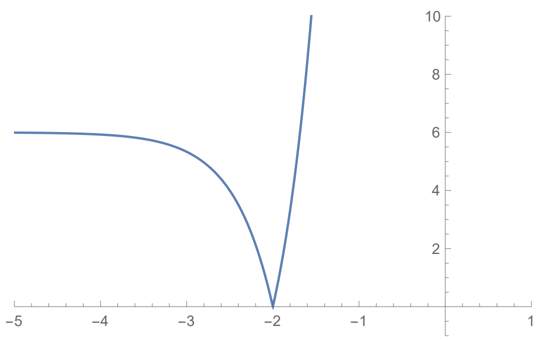
   (f) $x \in \mathbb{R}$

   (g) $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\pi/4 + k\pi, \pi/4 + k\pi)$

   (h) nemá řešení

3. Grafy

   (a) 

   (b) 

4. Parametry

   (a) Pro $\alpha > 0$ nemá řešení, pro $\alpha = 0$ je řešení $x \in \mathbb{R}$, pro $\alpha < 0$ je řešení $x \in (-\infty, -\log(-\alpha))$

   (b) Pro $\alpha < 0$ je řešení $x \in \mathbb{R}$, pro $\alpha \in [0, 1)$ je řešení $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\arccos\alpha + k\pi, \arccos\alpha + k\pi)$, pro $\alpha \geq 1$ nemá řešení

   (c) Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ má řešení $x = -2$, pro $\alpha \neq 0$ má navíc řešení $x = 1/\alpha$

   (d) Rovnici splňují následující dvojice :

      i. $\alpha \leq -2, x = \frac{6}{\alpha}$

      ii. $\alpha = -2, x \leq -3$

      iii. $\alpha \in (2, 6], x = \frac{4}{\alpha-2}$

      iv. $\alpha \geq 6, x = \frac{6}{\alpha}$

5. $\sin 4x = 4\sin x\cos^3 x - 4\sin^3 x\cos x$
   $\cos 4x = \cos^4 x - 6\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x$

Sada 1 - řešení

1. Rovnice

   (a) $|x| + |x+1| = 3$

   Nulový bod pro první absolutní hodnotu je $x = 0$, pro druhou $x = -1$, rovnici budeme tedy řešit postupně na intervalech $(-\infty, -1]$, $[-1, 0]$ a $[0, \infty)$. Znaménka výrazů na těchto intervalech jsou:

	$(-\infty,-1]$	$[-1,0]$	$[0,\infty)$
x	-	-	+
x+1	-	+	+

- $x \in (-\infty, -1]$:
  Na tomto intervalu platí $|x| = -x$ a $|x+1| = -(x+1)$. Vyřešíme rovnici:

$$\begin{aligned} |x| + |x+1| &= 3 \\ -x - (x+1) &= 3 \\ -2x - 1 &= 3 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

  Hodnota -2 leží v intervalu $(-\infty, -1]$, a tedy $x = -2$ je řešení rovnice.

- $x \in [-1, 0]$:
  Na tomto intervalu platí $|x| = -x$ a $|x+1| = x+1$. Vyřešíme rovnici:

$$\begin{aligned} |x| + |x+1| &= 3 \\ -x + x + 1 &= 3 \\ 1 &= 3 \end{aligned}$$

  Rovnice tedy na tomto intervalu nemá řešení.

- $x \in [0, \infty)$:
  Na tomto intervalu platí $|x| = x$ a $|x+1| = x+1$. Vyřešíme rovnici:

$$\begin{aligned} |x| + |x+1| &= 3 \\ x + x + 1 &= 3 \\ 2x + 1 &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

  Hodnota 1 leží v intervalu $[0, \infty)$, a tedy $x = 1$ je řešení rovnice.

   Všechny řešení rovnice jsou $x \in \{-2, 1\}$.

   (b) $3^{x+1} = 9 \cdot 3^x - 18$

   Využijeme rovnost $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$.

$$\begin{aligned} 3^{x+1} &= 9 \cdot 3^x - 18 \\ 3^{x+1} &= 3^2 \cdot 3^x - 18 \\ 3^{x+1} &= 3^{x+2} - 18 && / + 18 - 3^{x+1} \text{ (a prohodíme strany rce)} \\ 3^{x+2} - 3^{x+1} &= 18 && /\text{na levé straně vytkneme } 3^{x+1} \\ 3^{x+1}(3-1) &= 18 && / : 2 \\ 3^{x+1} &= 3^2 && / \log_3 \\ x + 1 &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

(c) $\log(x^2+1) = 2\log(3-x)$

$$\begin{aligned} \log(x^2+1) &= 2\log(3-x) \\ \log(x^2+1) &= \log(3-x)^2 && /a\log b = \log b^a \\ x^2+1 &= (3-x)^2 && /\exp \\ x^2+1 &= x^2-6x+9 \\ 6x &= 8 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Všechny výrazy v rovnici jsou řešení definovány.

(d) $\sin 2x = \cos x$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \cos x && /\sin 2x = 2\sin x\cos x \\ 2\sin x\cos x &= \cos x \end{aligned}$$

Rozlišíme dva případy:

- $\cos x = 0$
  V tomto případě jsou obě strany rovnice nulové, a tedy rovnost je splněna. Tento případ nastane pro $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z\}$.
- $\cos x \neq 0$
  Pak můžeme dělit a pokračovat v řešení rovnice.

  $$\begin{aligned} 2\sin x\cos x &= \cos x && / : 2\cos x \\ \sin x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  To je splněno pro $x \in \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Všechny tyto hodnoty splňují $\cos x \neq 0$, všechny jsou tedy řešeními.

Všechna řešení jsou $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

(e) $|1-x| + 2|x+2| = 3(x+1)$
Nulové body a znaménka:

	$(-\infty,-2]$	$[-2,1]$	$[1,\infty)$
$1-x$	+	+	-
$x+2$	-	+	+

- $x \in (-\infty,-2]$:

  $$\begin{aligned} 1-x+2(-x-2) &= 3x+3 \\ -3x-3 &= 3x+3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

  -1 ale neleží v intervalu $(-\infty,-2]$, nejde tedy o řešení.
- $x \in [-2,1]$:

  $$\begin{aligned} 1-x+2(x+2) &= 3x+3 \\ x+5 &= 3x+3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

  1 leží v intervalu $[-2,1]$, tedy $x = 1$ je řešení.
- $x \in [1,\infty)$:

  $$\begin{aligned} -(1-x)+2(x+2) &= 3x+3 \\ 3x+3 &= 3x+3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

  Rovnice je splněna pro všechna $x \in [1,\infty)$.

Všechna řešení rovnice jsou $x \in [1, \infty)$.

(f) $2^{4-x} = 10 - 2^x$

$$\begin{aligned} 2^{4-x} &= 10 - 2^x && /a^{b+c} = a^b \cdot a^c \\ 16 \cdot 2^{-x} &= 10 - 2^x && /a^{-b} = \frac{1}{a^b} \\ \frac{16}{2^x} &= 10 - 2^x && /\text{substituce } y = 2^x \\ \frac{16}{y} &= 10 - y && / \cdot y, \text{můžeme, protože } y = 2^x \text{ je pro všechna } x \text{ nenulové} \\ 16 &= 10y - y^2 \end{aligned}$$

$$y^2 - 10y + 16 = 0$$
$$(y-2)(y-8) = 0$$

Řešení jsou $y = 2$ a $y = 8$. MUSÍME ZPÁTKY DOSADIT ZA y! Dostaneme rovnici $2^x = 2$, která má řešení $x = 1$, a rovnici $2^x = 8$, která má řešení $x = 3$. Všechna řešení jsou tedy $x \in \{1, 3\}$.

(g) $2\log_2(x-1) = \log_2(3x-7) + 1$

$$\begin{aligned} 2\log_2(x-1) &= \log_2(3x-7) + 1 && /\text{pravidla počítání s logaritmy} \\ \log_2(x-1)^2 &= \log_2(6x-14) && /\exp \\ (x-1)^2 &= 6x - 14 \end{aligned}$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$
$$(x-3)(x-5) = 0$$

Všechny výrazy v rovnici jsou pro obě řešení definovány, řešení tedy jsou $x \in \{3, 5\}$.

(h) $1 - |\sin x| = \cos^2 x$

$$\begin{aligned} 1 - |\sin x| &= \cos^2 x && /\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ 1 - |\sin x| &= 1 - \sin^2 x \\ |\sin x| &= \sin^2 x \end{aligned}$$

Rozlišíme případy:

- $\sin x = 0$:
  V tomto případě jsou obě strany rovnice nulové, a tedy rovnost je splněna. Tento případ nastane pro $x \in \{k\pi; k \in Z\}$.
- $\sin x > 0$:

  $$\begin{aligned} |\sin x| &= \sin^2 x && /\text{předpokládáme } \sin x > 0 \\ \sin x &= \sin^2 x && /\text{předpokládáme } \sin x \neq 0 \\ 1 &= \sin x \end{aligned}$$

  Dostáváme řešení $x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
- $\sin x < 0$:
  Obdobně jako pro $\sin x > 0$.

Všechna řešení tedy jsou $x \in \{\frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$.

(i) $||x| - |x-5|| = 3$

Rozlišíme případy:

- $|x| - |x-5| \geq 0$:
  Pak $||x| - |x-5|| = |x| - |x-5|$ a řešíme rovnici

  $$|x| - |x-5| = 3.$$

  Ta má řešení $x = 4$. Musíme ještě ověřit, že řešení splňuje $|x| - |x-5| \geq 0$, po dosazení dostaneme $4 - 1 \geq 0$. Tedy $x = 4$ je řešení původní rovnice.

- $|x| - |x-5| < 0$:
  Pak $||x| - |x-5|| = |x-5| - |x|$ a řešíme rovnici
  $$|x-5| - |x| = 3.$$
  Obdobně dostaneme řešení $x = 1$, pro které platí $|x| - |x-5| = -3 < 0$.

(j) $3^{2x+1} - 9 = 6 \cdot 3^x$

(k) $|\log x| + |\log(ex)| = 3$

(l) $2\sin x + \cos x = 1$

2. Vyřešte následující nerovnice

(a) $\dfrac{x-1}{2x-6} \geq 1$
Mohli bychom nerovnici vynásobit $2x-6$, pak bychom ale museli řešit, kdy je $2x-6$ nulové/kladné/záporné. "Lepší" postup:
$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2x-6} &\geq 1 && / -1\text{, na pravé straně chceme nulu} \\ \frac{x-1}{2x-6} - 1 &\geq 0 \\ \frac{5-x}{2x-6} &\geq 0 \\ (5-x) \cdot \frac{1}{2x-6} &\geq 0 \end{aligned}$$
Využijeme toho, že součin nenulových výrazů je kladný resp. záporný, pokud je počet záporných činitelů sudý resp. lichý, a fakt, že převrácená hodnota má stejné znaménko. Nulové body a znaménka na příslušných intervalech (pozor, výraz není definován pro $x = 3$):

	$(-\infty, 3)$	$(3, 5]$	$[5, \infty)$
$5-x$	+	+	-
$2x-6$	-	+	+

Řešení je tedy $x \in (3, 5]$.

(b) $\log_{1/4}(x^2 - x - 5) \leq 0$
Chceme na obě strany nerovnice aplikovat exponenciální funkci se základem 1/4. Ta je ale klesající, a proto musíme otočit znaménko nerovnosti.
$$\begin{aligned} \log_{1/4}(x^2 - x - 5) &\leq 0 \\ (x^2 - x - 5) &\geq 1 \\ x^2 - x - 6 &\geq 0 \end{aligned}$$

(c) $|x+2| + |x+3| < 4x - 2$

(d) $\dfrac{x+2}{x+3} > \dfrac{2x+3}{x+6}$

(e) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^3} > \dfrac{1}{9}$

(f) $|x-1| - |x+1| < |x| + 3$

(g) $|\tan x| < 1$

(h) $\left|\sin(4e^{2x})\right| + \left|\log(\log x + x^{86})\right| < 0$