

Sada 5

Příklad 1. Spočtěte následující limity za znalosti $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n$, (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^2})^n$,
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{100+2n})^n$, (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (49/50 + \frac{1}{7n})^n$.

Příklad 2. Limita posloupnosti zkoušková obtížnost:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sqrt[3]{n^3+n^2} - n \sqrt[3]{8n+1}}{\sqrt[n]{2n^2+1}}$
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n+1}} - \sqrt{n^2 + 2\sqrt{n+3}} \right) \frac{\sqrt[n]{n+n^n}}{\lfloor \sqrt{n+2} \rfloor}$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{2n+a} - \sqrt[3]{2n+b} \right) \cdot \sqrt[3]{(n+1)(3n+2)}, a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0$
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)^{100} - (n+2)^{200} + 400n^{199}}{1+2+\dots+n^{99}}$

Příklad 3. Limita posloupnosti zkoušková obtížnost:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt[3]{n^3+1} \rfloor - \lfloor \sqrt[3]{n^3-1} \rfloor}{\sqrt[n]{1+2^n+\dots+n^n}}$
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor \sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n \rfloor$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+\sin^2 n} - \sqrt{n-\cos^2 n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$
 (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^{50} - (n^2+1)^{25}}{\sqrt{n^{100}+n^{99}-1} - \sqrt{n^{100}+2n^{99}+1}}$
 (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^4 + \sqrt[3]{n}} - \sqrt[3]{n^4}) (\lfloor \sqrt[3]{n+1} \rfloor + \lfloor 2\sqrt[3]{n-1} \rfloor + \dots + \lfloor n \cdot \sqrt[3]{n+(-1)^{n+1}} \rfloor)$
 (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + \dots + \lfloor n\sqrt{n} \rfloor}$
 (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt[4]{n^4+n^3}}{\sqrt{n^2+3n} - \sqrt[3]{n^3+2n}}$

Příklad 4 (Pro echt fajnšmekry - Hausdorffova míra úsečky). Uvažujme rovinu $\mathbb{R}^2$. Označme S úsečku spojující bod $(0,0)$ a bod $(1,0)$. Označme $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x-y| \leq r\}$ (kruh se středem v x a poloměrem r). Pro $k, n \in \mathbb{N}$ položme

$$H_{1/n}^k(S) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^N (2r_i)^k : S \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(x_i, r_i), x_i \in \mathbb{R}^2, 2r_i < \frac{1}{n}, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Spočtěte $\mathcal{H}^1(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{1/n}^1(S)$ a $\mathcal{H}^2(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{1/n}^2(S)$.

Sada 5 - výsledky

Příklad 1

- (a) $\frac{1}{e}$, (c) 1,
(b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$, (d) 0.

Příklad 2

- (a) $\frac{1}{3}$ (c) $(a - b) \cdot 6^{-\frac{2}{3}}$
(b) $-\frac{1}{2}$ (d) -159000

Příklad 3

- (a) 0, (c) 1/2, (e) 1/6,
(b) 0, (d) -700, (f) 2,

Příklad 4 $\mathcal{H}^1(S) = 1$ (délka úsečky S) a $\mathcal{H}^2(S) = 0$ ("obsah" úsečky S)

Sada 5 - řešení

Použití Heineho věty

Tvrzení 5 (Heineho věta). *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $x \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) f je spojitá v bodě x ,

(ii) pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset I$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

Chceme spočítat limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n}$. Nejdříve spočteme $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Aby původní limita dávala smysl, musí platit $x \geq 0$. Použijeme implikaci (i) $\implies$ (ii) pro $f(x) = \sqrt{x}$ a posloupnost (x_n) . Dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}.$$

Příklad 2 a.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n \sqrt[3]{8^n + 1}}{\sqrt[n]{2n^2 + 1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \left(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8^n}} \right)}{2^n \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2n^2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8^n}}}{\sqrt[n]{1 + \frac{1}{2n^2}}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^3 + n^2)^2} + \sqrt[3]{n^3 + n^2} \cdot n \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8^n}} + n^2 \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{8^n})^2}}{\sqrt[3]{(n^3 + n^2)^2} + \sqrt[3]{n^3 + n^2} \cdot n \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8^n}} + n^2 \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{8^n})^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 - n^3 + \frac{n^3}{8^n}}{\sqrt[n]{1 + \frac{1}{2n^2}} \cdot n^2 \cdot \left(\sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n})^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8^n}} + \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{8^n})^2} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{n}{8^n}}{\sqrt[n]{1 + \frac{1}{2n^2}} \cdot \left(\sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n})^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8^n}} + \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{8^n})^2} \right)} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Poslední rovnost jsme získali díky opakovému použití věty o dvou strážnících na výrazy

$$c_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2n^2}},$$

$$d_n = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8^n}} + \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{8^n})^2}.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{1} &\leq c_n \leq \sqrt[n]{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1. \end{aligned}$$

Dále máme

$$\sqrt[3]{(1)^2} + \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{(1)^2} \leq d_n \leq 3 \cdot \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(1)^2} + \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{(1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = 3$$

Příklad 2 b.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n} + 1} - \sqrt{n^2 + 2\sqrt{n} + 3} \right) \frac{\sqrt[n]{n + n^n}}{[\sqrt{n + 2}]} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} + 1 - (n^2 + 2\sqrt{n} + 3)}{\sqrt{n^2 + \sqrt{n} + 1} + \sqrt{n^2 + 2\sqrt{n} + 3}} \frac{\sqrt[n]{n + n^n}}{[\sqrt{n + 2}]} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{n} - 2}{\sqrt{n^2 + \sqrt{n} + 1} + \sqrt{n^2 + 2\sqrt{n} + 3}} \frac{\sqrt[n]{n + n^n}}{[\sqrt{n + 2}]} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} \frac{-1 - \frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{3}{n}}} \frac{\sqrt[n]{n + n^n}}{[\sqrt{n + 2}]} \\ &\stackrel{\text{AL, spoj.}}{=} -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} \frac{\sqrt[n]{n + n^n}}{[\sqrt{n + 2}]} \stackrel{\text{AL}}{=} -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{[\sqrt{n + 2}]} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^n + n}}{n} = (*) \end{aligned}$$

Platí

$$\sqrt{n} - 1 \leq [\sqrt{n}] \leq [\sqrt{n + 2}] \leq \sqrt{n + 2},$$

a tedy

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + 2}} \leq \frac{\sqrt{n}}{[\sqrt{n + 2}]} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1}.$$

Zároveň

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}} \stackrel{\text{AL, spoj.}}{=} 1$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} \stackrel{\text{AL, RŠ}}{=} 1.$$

Z Věty o dvou polícajtech pak platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{[\sqrt{n + 2}]} = 1$. Dále platí

$$1 = \frac{\sqrt[n]{n^n}}{n} \leq \frac{\sqrt[n]{n^n + n}}{n} \leq \frac{\sqrt[n]{2n^n}}{n} = \sqrt[n]{2}$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2}.$$

Opět použitím Věty o dvou polícajtech dostáváme

$$(*) = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 2 c.

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{2n+a} - \sqrt[3]{2n+b} \right) \cdot \sqrt[3]{(n+1)(3n+2)} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(n+1)(3n+2)} \left(\sqrt[3]{2n+a} - \sqrt[3]{2n+b} \right) \cdot \frac{(\sqrt[3]{2n+a})^2 + \sqrt[3]{2n+a} \cdot \sqrt[3]{2n+b} + (\sqrt[3]{2n+b})^2}{(\sqrt[3]{2n+a})^2 + \sqrt[3]{2n+a} \cdot \sqrt[3]{2n+b} + (\sqrt[3]{2n+b})^2} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n+a) - (2n+b)) \cdot \sqrt[3]{(n+1)(3n+2)}}{(\sqrt[3]{2n+a})^2 + \sqrt[3]{2n+a} \cdot \sqrt[3]{2n+b} + (\sqrt[3]{2n+b})^2} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-b)n^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})}}{(n^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{2+\frac{a}{n}})^2 + \sqrt[3]{2+\frac{a}{n}} \cdot \sqrt[3]{2+\frac{b}{n}} + (\sqrt[3]{2+\frac{b}{n}})^2} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{(a-b) \cdot \sqrt[3]{3}}{3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}} = (a-b) \cdot 6^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

Použili jsme vzorec $A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1})$.

Příklad 2 d. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $P_{\leq k}(n)$ polynom proměnné n stupně nejvýše k .

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)^{100} - (n+2)^{200} + 400n^{199}}{1+2+\dots+n^{99}} \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{200} + 100n^{198} + P_{\leq 196}(n) - n^{200} - 400n^{199} - 4 \cdot \binom{200}{2}n^{198} - P_{\leq 197}(n) + 400n^{198}}{\frac{n^{99}(n^{99}+1)}{2}} \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{198}(100 - 79600 + \frac{P_{\leq 197}(n)}{n^{198}})}{n^{198}(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^{99}})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100 - 79600 + \frac{P_{\leq 197}(n)}{n^{198}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{n^{99}}} \stackrel{\text{AL}}{=} -159000.
\end{aligned}$$

Příklad 3

Vzorové řešení doc. Johanise.