

Sada 7

Můžete používat známé limity z přednášky, tj.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Příklad 1. Spočtěte limity.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$	(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$	(l) $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}$
(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$	(h) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{9+x-2}}$	
(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$	(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x-1}}$	
(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$	(j) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x-3}}{\sqrt{x-2}}$	(m) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}}((x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}})$
(e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$	(k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$	(n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2-2x-\frac{1}{x}}{3x^2+3}}$
(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$		

Příklad 2. Ukažte, že platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Z Heineho věty pak plyne $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (jako limita posloupnosti).

Příklad 3. Spočtěte následující limity za použití známých limit a věty o limitě složené funkce:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{x^2},$	(j) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1},$	(r) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}},$
(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x},$	(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{\log(1-x^2)},$	(s) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}},$
(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{1-\cos 4x^2},$	(l) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 - \frac{2}{x^2}\right),$	(t) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\tan \left(\frac{\pi}{8} + x\right)\right]^{\tan 2x},$
(d) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{2x}},$	(m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(2+e^{3x})}{\log(3+e^{2x})},$	(u) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\log x+1}{\log x}\right)^{\log x},$
(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x},$	(n) $\lim_{x \$	

Sada 7 - výsledky

Příklad 1

- | | | |
|---------------------|--------------------------|--------------------------|
| (a) 1 | (f) $\frac{1}{2}$ | (k) $\frac{1}{2}$ |
| (b) -1 | (g) $\frac{3}{2}$ | (l) 1 |
| (c) 0 | (h) $\frac{112}{27}$ | (m) $\frac{4}{3}$ |
| (d) $\frac{1}{2}$ | (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | (n) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ |
| (e) $\frac{1}{144}$ | (j) $\frac{4}{3}$ | |

Příklad 3

- | | | |
|------------------|-----------------------------|---|
| (a) 3 | (j) -3 | (r) 1 |
| (b) 0 | (k) -1 | (s) 0 |
| (c) $1/8$ | (l) 0 | (t) neexistuje (0 zprava, ∞ zleva) |
| (d) $1/\sqrt{2}$ | (m) $3/2$ | (u) e |
| (e) $\sqrt{2}$ | (n) 0 | (v) e |
| (f) 0 | (o) $\frac{\log 3}{\log 2}$ | (w) e |
| (g) 1 | (p) e^{-2} | (x) 1 |
| (h) $1/2$ | (q) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ | |
| (i) 1 | | |

Příklad 4

- | | |
|--------------|--------------|
| (a) $-\pi/2$ | (c) ∞ |
| (b) $\pi/3$ | (d) e |

Sada 7 - řešení

Příklad 1 (a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{VoAL} + \text{VOLSf (S)}}{=} 1$$

Nutno poznamenat, že jsme využili toho, že x je kladné, neb $x \rightarrow \infty$.

Příklad 1 (b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{VoAL} + \text{VOLSf (P)}}{=} -1$$

Příklad 1 (c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \stackrel{\text{VOLSf (P)} + \text{VoAL}}{=} 0$$

Příklad 1 (d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \stackrel{\text{spoj.}}{=} \frac{1}{2}$$

Příklad 1 (e)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2-\sqrt[3]{6-x}}{x^3+8} \cdot \frac{4+2 \cdot \sqrt[3]{6-x}+(\sqrt[3]{6-x})^2}{4+2 \cdot \sqrt[3]{6-x}+(\sqrt[3]{6-x})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x^3+8)(4+2 \cdot \sqrt[3]{6-x}+(\sqrt[3]{6-x})^2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x^2-2x+4)(4+2 \cdot \sqrt[3]{6-x}+(\sqrt[3]{6-x})^2)} \stackrel{\text{VoAL} + \text{spoj.}}{=} \frac{1}{144} \end{aligned}$$

Použili jsme $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ a $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

Příklad 1 (f)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})} \stackrel{\text{VOLSf (P)} + \text{VoAL}}{=} \frac{1}{2}$$

Příklad 1 (g)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x} \cdot \sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2}{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x} \cdot \sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x((\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x} \cdot \sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2)}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \stackrel{\text{VOLSf (P)} + \text{VoAL}}{=} \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Příklad 1 (h)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{9+x}-2} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{9+x}-2} \cdot \frac{A}{A} \cdot \frac{(\sqrt[4]{9+x})^3+2(\sqrt[4]{9+x})^2+4\sqrt[4]{9+x}+8}{(\sqrt[4]{9+x})^3+2(\sqrt[4]{9+x})^2+4\sqrt[4$$

Příklad 1 (i)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(1 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}})}{\sqrt{2x}\sqrt{1 - \frac{1}{2x}}} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}})}{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{1}{2x}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{1}{2x}}} = (*)\end{aligned}$$

a použijeme věty o limitě složené funkce pro $f(y) = \sqrt{y}$ a $g(x) = 1 - \frac{1}{2x}$. Máme $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1$ a f je v bodě 1 spojitá. Dostáváme tedy

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Příklad 1 (j)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1+2x-9}{\sqrt{1+2x}+3} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x-4} = 2 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} \stackrel{\text{AL+spoj.}}{=} 2 \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{3}.$$

Příklad 1 (k)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} + 1} \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} + 1} = (*)\end{aligned}$$

a použijeme Větu o limitě složené funkce. Nejprve v čitateli větu aplikujeme na $f(y) = \sqrt{y}$ a $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Je $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1$, a tedy ze spojitosti odmocniny v bodě 1 máme, že $\lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{y} = 1$. V jmenovateli postupujeme následovně:

položme $f(y) = \sqrt{1 + \sqrt{y}} + 1$ a $g(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}$. Pak $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, a tedy ze spojitosti funkce f zprava v bodě 0 máme, že $\lim_{y \rightarrow 0^+} f(y) = 2$. Odtud

$$(*) = \frac{1}{2}.$$

Příklad 1 (l)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} - \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{\frac{1}{x}}\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x}}\left(\sqrt{1 + \sqrt{x + x^{\frac{3}{2}}}} + \sqrt{1 - \sqrt{x + x^{\frac{3}{2}}}}\right)} \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} 2 \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \sqrt{x + x^{\frac{3}{2}}}} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 - \sqrt{x + x^{\frac{3}{2}}}}} = (*)\end{aligned}$$

a použijeme třikrát větu o limitě složené funkce. V čitateli uvažujeme spojitou funkci $f(y) = \sqrt{1 + \sqrt{y}}$ a $g(x) = \sqrt{x}$. Pak

limitu: Položme $f(y) = \sqrt{1 + \sqrt{y}}$ a $g(x) = x + x^{\frac{3}{2}}$. Pak $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$, a tedy ze spojitosti zprava funkce f máme $\lim_{y \rightarrow 0^+} f(y) = 1$. Pro druhou limitu ve jmenovateli volíme funkce $f = \sqrt{1 - \sqrt{y}}$ a $g(x) = x + x^{\frac{3}{2}}$. Analogicky jako pro první limitu jmenovatele ukážeme, že i v tomto případě $\lim_{y \rightarrow 0^+} f(y) = 1$. Odtud máme

$$(*) = 1.$$

Příklad 1 (m)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}}((x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}((x+1)^2 - (x-1)^2)}{(x+1)^{\frac{4}{3}} + (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}((1 + \frac{1}{x})^{\frac{4}{3}} + (1 + \frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}(1 - \frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} + (1 - \frac{1}{x})^{\frac{4}{3}})} \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} 4 \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{4}{3}} + \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} + \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^{\frac{4}{3}}} = (*) \end{aligned}$$

a použijeme čtyřikrát větu o limitě složené funkce. Ukážeme první z limit jmenovatele; ostatní se spočítají analogicky. Položme $f(y) = (1 + y)^{\frac{4}{3}}$ a $g(x) = \frac{1}{x}$. Je $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, a tedy ze spojitosti funkce f v bodě 0 máme $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$. Odtud plyne, že

$$(*) = \frac{4}{3}.$$

Příklad 1 (n) Spočtěme nejdříve limitu výrazu v odmocnině:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - \frac{1}{x}}{3x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3})}{x^2(3 + \frac{3}{x^2})} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{3}.$$

Nyní použijeme větu o limitě složené funkce pro $f(y) = \sqrt{y}$ a $g(x) = \frac{x^2 - 2x - \frac{1}{x}}{3x^2 + 3}$. Již jsme spočetli, že $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{1}{3}$, a tedy ze spojitosti funkce f v bodě $\frac{1}{3}$ dostáváme $\lim_{y \rightarrow \frac{1}{3}} f(y) = \sqrt{\frac{1}{3}}$, což je náš výsledek.

Příklad 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\log(1 + \frac{1}{x})x}$$

Spočteme nejdříve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

Použijeme VOLSFS pro $f(y) = \frac{\log(1+y)}{y}$ a $g(x) = \frac{1}{x}$. Platí $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, přičemž $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: g(x) \neq 0$, máme tedy ověřen předpoklad (P). Z Příkladu 3 (i) víme, že $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$. Tedy platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) \stackrel{\text{VOLSFS}}{=} 1$$

Znov

Funkce $\sin x$ je omezená a platí $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, a tedy $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Příklad 3 (c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{1 - \cos 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{16} \frac{1}{\frac{1 - \cos 4x^2}{(4x^2)^2}} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{16} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1 - \cos 4x^2}{(4x^2)^2}} = (*)$$

Použijeme VOLSFS pro $f(y) = \frac{1 - \cos y}{y^2}$ a $g(x) = 4x^2$. Zřejmě $\lim_{x \rightarrow 0} 4x^2 = 0$. Navíc pro $x \neq 0$ platí $4x^2 \neq 0$, a tedy máme ověřen předpoklad (P). Platí tedy

$$(*) = \frac{1}{16} \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y^2}} = \frac{1}{16} \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 3 (d)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{2} \cos \sqrt{x}} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = (*)$$

Použijeme VOLSFS pro $f(y) = \sin(y)/y$ a $g(x) = \sqrt{x}$. Zřejmě $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} = 0$. Navíc pro $x > 0$ platí $\sqrt{x} > 0$ zprava, a tedy máme ověřen předpoklad (P). Platí tedy

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{\sin \sqrt{y}}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 3 (e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{x^2} \frac{x^2}{1 - \cos x} \stackrel{\text{AL, ZL}}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1 - \cos x^2}{(x^2)^2}} = (*)$$

Nyní spočteme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{(x^2)^2}.$$

Použijeme VOLSFS pro $f(y) = \frac{1 - \cos y}{y^2}$ a $g(x) = x^2$. Zřejmě $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. Navíc pro $x \neq 0$ platí $x^2 \neq 0$, a tedy máme ověřen předpoklad (P). Platí tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{(x^2)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

Znovu použijeme VOLSFS, tentokrát pro $f(y) = \sqrt{y}$ a $g(x) = \frac{1 - \cos x^2}{(x^2)^2}$. Výše jsme spočetli $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1/2$, navíc $f(y) = \sqrt{y}$ je v $y = 1/2$ spojitá, tedy máme ověřen předpoklad (S). Platí tedy

$$(*) = 2 \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}} \sqrt{y} = \sqrt{2}.$$

Příklad 3 (f)

Z AL a známých limit máme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1/1 = 1$. Použijeme VOLSFS pro $f(y) = \log y$ a $g(x) = \frac{x}{\sin x}$. Výše jsme spočetli $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$, navíc $f(y) = \log y$ je v $y = 1$ spojitá, tedy máme ověřen předpoklad (S). Platí tedy

Příklad 3 (i) Použijeme VOLSFS pro $f(y) = \frac{\log y}{y-1}$ a $g(x) = x + 1$. Zřejmě $\lim_{x \rightarrow 0} x + 1 = 1$. Navíc pro $x \neq 0$ platí $x + 1 \neq 1$, a tedy máme ověřen předpoklad (P). Platí tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log y}{y-1} = 1.$$

Příklad 3 (j) Použijeme VOLSFS pro $f(y) = \frac{2y^2+y-1}{2y^2-3y+1}$ a $g(x) = \sin x$. Zřejmě $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \sin x = 1/2$. Navíc pro $x \in P(\pi/6, 1/42)$ platí $\sin x \neq 1/2$, a tedy máme ověřen předpoklad (P). Spočteme

$$\lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2y^2+y-1}{2y^2-3y+1} = \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2y-1)(y+1)}{(2y-1)(y-1)} = \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{y+1}{y-1} = -3.$$

Z VOLSFS máme

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1} = \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2y^2 + y - 1}{2y^2 - 3y + 1} = -3.$$

Příklad 3 (k)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{\log(1-x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{(1+x^2)-1} \cdot \frac{(1+x^2)-1}{(1-x^2)-1} \cdot \frac{(1-x^2)-1}{\log(1-x^2)} \\ &\stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{(1+x^2)-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)-1}{(1-x^2)-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)-1}{\log(1-x^2)} = (I) \cdot (II) \cdot (III) = (*) \end{aligned}$$

Snadno spočteme $(II) = -1$. Dále spočteme (I) . Použijeme VOLSFS pro $f(y) = \frac{\log y}{y-1}$ a $g(x) = 1+x^2$. Zřejmě $\lim_{x \rightarrow 0} 1+x^2 = 1$. Navíc pro $x \neq 0$ platí $1+x^2 \neq 1$, a tedy máme ověřen předpoklad (P). Spočteme

$$(I) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{(1+x^2)-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log y}{y-1} = 1.$$

Obdobně se spočte $(III) = 1$, a tedy

$$(*) = 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1.$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 3 (l)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{2}{x^2} - 1 \right) \frac{\log \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)}{1 - \frac{2}{x^2} - 1} \stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{2}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)}{1 - \frac{2}{x^2} - 1} = (*)$$

Na druhou limitu použijeme VOLSFS pro $f(y) = \frac{\log y}{y-1}$ a $g(x) = 1 - 2/x^2$. Platí $\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - 2/x^2 = 1$. Navíc pro $x \in (0, \infty)$ platí $1 - 2/x^2 \neq 1$, a tedy máme ověřen předpoklad (P).

$$(*) = 0 \cdot \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log y}{y-1} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Pozor! Nesatčí přestat počítat ve chvíli, kdy spočteme, že první limita je rovna 0 a prohlásit, že cokoliv krát 0 je 0! To platí pro reálná čísla, my ale pracujeme na rozšířené reálné ose, která obsahuje nekonečno. Musíme tedy dopočítat, že druhá limita je reálné číslo. A

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 3 (n)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1+3^x)}{\log(1+2^x)} \stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1+3^x)}{3^x}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1+2^x)}{2^x}} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{2^x} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} \frac{1}{1} \cdot 0 = 0$$

Pro čitatele použijeme VOLSF pro $f(y) = \log(1+y)/y$ a $g(x) = 3^x$. Zřejmě $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0$. Pro jmenovatele použijeme VOLSF pro $f(y) = \log(1+y)/y$ a $g(x) = 2^x$. Zřejmě $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$. Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 3 (o)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+3^x)}{\log(1+2^x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log 3^x + \log(3^{-x}+1)}{\log 2^x + \log(2^{-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \log 3 + \log(3^{-x}+1)}{x \log 2 + \log(2^{-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log 3 + \frac{1}{x} \log(3^{-x}+1)}{\log 2 + \frac{1}{x} \log(2^{-x}+1)} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{\log 3}{\log 2}$$

Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 3 (p)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\log(1-\frac{2}{x}) \cdot x} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} e^{-2}$$

Kde poslednslední rovnost získáme úpravou vnitřní funkce a použitím VOLSF (S):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 - \frac{2}{x}\right) \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} -2 \cdot \frac{\log(1-\frac{2}{x})}{\frac{-2}{x}} \stackrel{\text{VOLSF+VOAL+známá lim.}}{=} -2$$

V poslední rovnosti bereme VOLSF $g(x) = \frac{-2}{x}$ a $f(y) = \frac{\log(1-y)}{y}$. Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 3 (q)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-x}{(1-x) \cdot (1+\sqrt{x})}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} \stackrel{\text{spoj.}}{=} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Příklad 3 (r)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\log(\frac{1+x}{2+x}) \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} e^0 = 1$$

Kde VOLSF (S) použijeme na vnitřní funkci exponentu následovně:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\frac{1+x}{2+x}\right) \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{2}{x}+1}\right) \cdot \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}-1} \stackrel{\text{spoj. + AL}}{=} \log 1 \cdot 0 = 0.$$

Příklad 3 (s)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\log(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}) \cdot \frac{x^3}{1-x}} \stackrel{\text{VOLSF}}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \tan 2x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} \tan 2x = -\infty.$$

Využitím předchozích rovností dostáváme následující.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \left[\tan \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\tan 2x} = e^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} \left[\tan \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\tan 2x} = e^{-\infty} = 0$$

Jednostranné limity nevyšly stejně, tedy limita ze zadání neexistuje.

Příklad 3 (u)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\log x + 1}{\log x} \right)^{\log x}$$

Použijeme substituci $y = \log x$:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y+1}{y} \right)^y = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \stackrel{\text{Př. 2}}{=} e.$$

Tedy i

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\log x + 1}{\log x} \right)^{\log x} = e.$$

Příklad 3 (v)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\log(1+x^2) \cdot \frac{1}{\sin^2 x}} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} e^1 = e$$

Kde VOLSF (S) použijeme na vnitřní funkci exponentu následovně:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x^2) \cdot \frac{1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log \left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} \right] \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} \stackrel{\text{AL}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \log \left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} \right] \right) \cdot 1^2 \stackrel{\text{VOLSF} + \text{Př. 2}}{=} 1$$

Zde použijeme VOLSF (S) na $f(y) = \log(y)$ a $g(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}$, neboť víme, že $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = e$. Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 3 (w)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\log(1+\tan x) \cdot \frac{1}{\sin x}} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} e^1 = e$$

Kde VOLSF (S) použijeme na vnitřní funkci exponentu následovně:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(1 + \tan x) \cdot \frac{1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \tan x)}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos x} \stackrel{\text{AL} + \text{VOLSF} + \text{známá lim} + \text{spoj.}}{=} 1 \cdot 1 = 1$$

Zde použijeme VOLSF (S) na $f(y) = \frac{1+\log(y)}{y}$ a $g(x) = \tan x$, neboť víme, že $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Pravá strana je definována, čímž jsme ověřili předpoklady věty o aritmetice limit.

Příklad 3 (x)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\frac{1}{\sin x}}}{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}} = \frac{e}{e} = 1$$

Kde limita čitatele plyne z předchozího příkladu a limitu jmenovatele spočteme pomocí substituce $y = \sin x$

Opět spočítáme nejdřív limitu argumentu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1)} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1)} = (*).$$

Položme $f(y) = \sqrt{1+y}+1$ a $g(x) = \frac{1}{x}$. Pak $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, a tedy ze spojitosti funkce f v bodě 0 máme, že $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 2$. Z věty o limitě složené funkce jsme tedy dostali, že $(*) = \frac{1}{2}$. Funkce $\arccos$ je spojitá v bodě $\frac{1}{2}$, a tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arccos(\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}} \arccos y = \frac{\pi}{3}.$$

Příklad 4 (c)

Víme, že funkce $\arctan x \geq 1$ od jistého x_0 počínaje (neboť $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} > 1$). Dále víme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccot} x = 0$ a $\operatorname{arccot} x > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro $x \geq x_0$ tedy platí odhad $\frac{1}{\operatorname{arccot} x} \leq \frac{\arctan x}{\operatorname{arccot} x}$. Výraz nalevo ale diverguje k $+\infty$ pro $x \rightarrow \infty$. Z věty o dvou polícajtech tedy usoudíme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{\operatorname{arccot} x} = \infty$.

Příklad 4 (d) Upravíme

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{e^2 - e^{2x}}{\arccos^2 x}}$$

a soustředíme se na vnitřek odmocniny. Počítejme za věty o limitě složené funkce. Položme $f(y) = \frac{e^2 - e^{2 \cos y}}{y^2}$ a $g(x) = \arccos x$. Víme, že $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 0$, a pro $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ platí, že $g(x) \neq 0$. Z podmínky (P) tedy dostáváme, že

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^2 - e^{2x}}{\arccos^2 x} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^2 - e^{2 \cos y}}{y^2} = e^2 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{2(\cos y - 1)}}{y^2} \\ &= e^2 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^{2(\cos y - 1)} - 1}{2(\cos y - 1)} \cdot \frac{2(1 - \cos y)}{y^2} \stackrel{\text{AL}}{=} e^2 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^{2(\cos y - 1)} - 1}{2(\cos y - 1)} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{2(1 - \cos y)}{y^2} = (*). \end{aligned}$$

Druhá z limit je dvojnásobek známé limity s funkcí cosinus. Spočítáme $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{2(1 - \cos y)}{y} = 1$. K první limitě uvažujme funkci $f(y) = \frac{e^y - 1}{y}$ a $g(x) = 2(\cos x - 1)$. Pak $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ a zároveň pro $x \in (0, \frac{1}{2})$ je $g(x) \neq 0$. Z podmínky (P) tudíž plyne, že

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^{2(\cos y - 1)} - 1}{2(\cos y - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Odtud máme, že

$$(*) = e^2.$$

Na závěr aplikujeme větu o limitě složené funkce ještě jednou, tentokrát pro $f(y) = \sqrt{y}$ a $g(x) = \frac{e^2 - e^{2x}}{\arccos^2 x}$. Spočítali jsme, že $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = e^2$, a tudíž ze spojitosti f v bodě e^2 dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{e^2$$