

Sada 9

Příklad 1 (Základy, aritmetika derivací). Určete definiční obor funkce, derivaci funkce a definiční obor spočtené derivace.

- | | | |
|---|--|--|
| (a) $f(x) = x^5 - 17x^3 + \sqrt{3x} - 8$ | (f) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$ | (j) $f(x) = \tan x - \sin x$ |
| (b) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$ | (g) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 7}{x^2 + 5x - 6}$ | (k) $f(x) = \sin x \cos x - \tan x$ |
| (c) $f(x) = x + 2\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}$ | (h) $f(x) = \log x + \frac{\cos x}{\pi}$ | (l) $f(x) = \arcsin x - 3 \operatorname{arccot} x$ |
| (d) $f(x) = x \log x + x \log_3 x + 2e^x$ | (i) $f(x) = \frac{x \cos x - 2}{\log x}$ | (m) $f(x) = 2 \arctan x + 5 \arccos x$ |
| (e) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ | | |

Příklad 2 (Složené funkce). Určete definiční obor funkce, derivaci funkce a definiční obor spočtené derivace.

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $f(x) = (x^2 + 50x + 12)^{78}$ | (j) $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$ | (r) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ |
| (b) $f(x) = x^3(x+2)^8(x-7)^{-11}$ | (k) $f(x) = 2 \log \frac{x^2-1}{x^2+1}$ | (s) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ |
| (c) $f(x) = \operatorname{arccot}(2x)$ | (l) $f(x) = \sin^2 x - \sin(x^2)$ | (t) $f(x) = \arcsin(\cos x)$ |
| (d) $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$ | (m) $f(x) = \log(\log^2(\log^3(x)))$ | (u) $f(x) = \log(\arccos x)$ |
| (e) $f(x) = \log(x^2 + x + 2)$ | (n) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ | (v) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{2}}{x}$ |
| (f) $f(x) = \cos(x^3 - x + 2)^9$ | (o) $f(x) = \frac{x^2(1-x)^3}{1+x}$ | (w) $f(x) = e^{x^2-x+1} - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$ |
| (g) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ | (p) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ | (x) $f(x) = \arctan \sqrt{x^2-1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| (h) $f(x) = \frac{1}{\log x}$ | (q) $f(x) = x^x$ | (y) $f(x) = x (\arcsin(x^3))^2$ |
| (i) $f(x) = \cos^9(x^3 - x + 2)$ | | |

Příklad 3 (Funkce definované „po větvích“). Určete definiční obor funkce, derivaci funkce a definiční obor spočtené derivace.

- | | |
|--|---|
| (a) $f(x) = x $ | (g) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in (-\infty, 1) \\ (1-x)(2-x), & x \in [1, 2] \\ -(2-x), & x \in (2, \infty) \end{cases}$ |
| (b) $f(x) = \min\{x^2, -x^2 + 3x\}$ | (h) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ |
| (c) $f(x) = \max\{-x^2, 2x - 3\}$ | (i) $f(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ |
| (d) $f(x) = \log x $ | |
| (e) $f(x) = e^{\log x }$ | |
| (f) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0] \\ \log(1+x), & x \in (0, \infty) \end{cases}$ | |

Sada 9 - výsledky

Příklad 1

- (a) $\mathcal{D}_f = [0, \infty)$; $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} - 51x^2 + 5x^4$; $\mathcal{D}_{f'} = (0, \infty)$ (h) $\mathcal{D}_f = (0, \infty)$; $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{\sin x}{\pi}$; $\mathcal{D}_{f'} = (0, \infty)$
- (b) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = e^x(1 + x^2)$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ (i) $\mathcal{D}_f = (0, \infty) \setminus \{1\}$; $f'(x) = \frac{2+x \cos(x)(-1+\log(x))-x^2 \log(x) \sin(x)}{x \log^2(x)}$; $\mathcal{D}_{f'} = (0, \infty) \setminus \{1\}$
- (c) $\mathcal{D}_f = [0, \infty)$; $f'(x) = 1 + \frac{1}{4x^{3/4}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\mathcal{D}_{f'} = (0, \infty)$ (j) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$; $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - \cos(x)$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$
- (d) $\mathcal{D}_f = (0, \infty)$; $f'(x) = 1 + 2e^x + \frac{1}{\log 3} + (1 + \frac{1}{\log 3}) \log x$; $\mathcal{D}_{f'} = (0, \infty)$ (k) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$; $f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) - \frac{1}{\cos^2(x)}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$
- (e) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \log(\frac{3}{2})(\frac{3}{2})^x$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ (l) $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$; $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{(1+x^2)}$; $\mathcal{D}_{f'} = (-1, 1)$
- (f) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $f'(x) = \frac{9-4x-x^2}{x^4}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (m) $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$; $f'(x) = -\frac{5}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{1+x^2}$; $\mathcal{D}_{f'} = (-1, 1)$
- (g) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-6, 1\}$; $f'(x) = \frac{-23-26x+7x^2}{(x-1)^2(6+x)^2}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-6, 1\}$

Příklad 2

- (a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = 78(x^2 + 50x + 12)^{77} \cdot (x^2 + 50x + 12)$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ (n) $\mathcal{D}_f = (-3, 3)$; $f'(x) = 9 \cdot (9 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$; $\mathcal{D}_{f'} = (-3, 3)$
- (b) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{7\}$; $f'(x) = -\frac{3x^2(x+2)^7(31x+14)}{(x-7)^{-12}}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{7\}$ (o) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $f'(x) = \frac{x(1-x)^2(2-4x^2-4x)}{(1+x)^2}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- (c) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = -\frac{1}{1+4x^2} \cdot 2$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ (p) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $f'(x) = 2e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^3}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- (d) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{3+4x-3x^2}{(1+x^2)^2}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ (q) $\mathcal{D}_f = (0, \infty)$; $f'(x) = x^x \cdot (\log x + 1)$; $\mathcal{D}_{f'} = (0, \infty)$
- (e) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+2}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ (r) $\mathcal{D}_f = (0, \infty)$; $f'(x) = (\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-\log x}{x^2} + 1\right)$; $\mathcal{D}_{f'} = (0, \infty)$
- (f) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = -\sin(x^3 - x + 2)^9 \cdot 9(x^3 - x + 2)^8 \cdot (3x^2 - 1)$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ (s) $\mathcal{D}_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi)$; $f'(x) = e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot \left(-\sin x \log \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$; $\mathcal{D}_{f'} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi)$
- (g) $\mathcal{D}_f = [-2, 2]$; $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; $\mathcal{D}_{f'} = (-2, 2)$ (t) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$
- (h) $\mathcal{D}_f = (0, \infty) \setminus \{1\}$; $f'(x) = -\frac{1}{x \log^2 x}$; $\mathcal{D}_{f'} = (0, \infty) \setminus \{1\}$ (u) $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$; $f'(x) = \frac{1}{\arccos x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\mathcal{D}_{f'} = (-1, 1)$
- (i) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = 9 \cos^8(x^3 - x + 2) \cdot (-\sin(x^3 - x + 2) \cdot (3x^2 - 1))$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ (v) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $f'(x) = \frac{-1}{2+x^2}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- (j) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \cos(\sin(\sin(x))) \cdot \cos(\sin(x)) \cdot \cos x$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ (w) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = e^{x^2-x+1} \cdot (2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{e^{2x}(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$
- (k) $\mathcal{D}_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; $f'(x) = \frac{8x}{x^4-1}$; $\mathcal{D}_{f'} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ (x) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus (0, 1)$; $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{\sqrt{x^2-1} \log x \cdot 2x^2}{x^3-x}$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus (0, 1)$
- (l) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \sin(2x) - 2x \cos(x^2)$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ (y) $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$; $f'(x) = (\arcsin(x^3))^2 + 2x \cdot \arcsin(x^3) \cdot \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$; $\mathcal{D}_{f'} = (-1, 1)$
- (m) $\mathcal{D}_f = (1, \infty) \setminus \{e\}$; $f'(x) = \frac{6}{x \log(x) \log(\log^3(x))}$; $\mathcal{D}_{f'} = (1, \infty) \setminus \{e\}$

Příklad 3

(a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \operatorname{sgn} x$; $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; v $x = 0$ je derivace zleva -1 , zprava 1

$$(b) f' = \begin{cases} 3 - 2x, & x \in (-\infty, 0) \cup (3/2, \infty), \\ 2x, & x \in (0, 3/2) \\ \text{nedef}, & x \in \{0, 3/2\} \end{cases},$$

$$f'_-(0) = 3, f'_+(0) = 0, f'_-(3/2) = 3, f'_+(3/2) = 0$$

$$(c) f' = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty), \\ -2x, & x \in (-3, 1) \\ \text{nedef}, & x \in \{-3, 1\} \end{cases},$$

$$f'_-(-3) = 2, f'_+(-3) = 6, f'_-(1) = -2, f'_+(1) = 2$$

$$(d) f' = \begin{cases} 1/x, & x \in (-1, 0) \cup (1, \infty), \\ -1/x, & x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1), \\ \text{nedef}, & x \in \{-1, 0, 1\} \end{cases},$$

$$f'_-(-1) = -1, f'_+(-1) = 1, f'_-(0) = \infty, f'_+(0) = -\infty,$$

$$f'_-(1) = -1, f'_+(1) = 1$$

(e) $f'(x) = \operatorname{sgn} x$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(f) f' = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0], \\ 1/(1+x), & x \in (0, \infty) \end{cases},$$

Pozor. Bod $x = 0$ je třeba vyšetřit zvlášť.

$$(g) f' = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, 1], \\ 2x - 3, & x \in (1, 2), \\ 1, & x \in [2, \infty) \end{cases},$$

Pozor. Body $x = 1$ a $x = 2$ je třeba vyšetřit zvlášť.

$$(h) f' = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^{2/3} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2x \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

Pozor. Bod $x = 0$ je třeba vyšetřit zvlášť.

$$(i) f' = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ -\infty, & x = 0 \end{cases}$$

Sada 9 - řešení

Příklad 1 (a) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na jednotlivé sčítance použijeme vzorec pro $(c \cdot x^\alpha)' = c\alpha \cdot x^{\alpha-1}$. Funkce je definována na $[0, \infty)$, neboť potřebujeme nezáporné číslo pod sudou omocninou. Derivace funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladné číslo pod sudou omocninou ve jmenovateli.

Příklad 1 (b) $((x^2 - 2x + 3)e^x)' = ((x^2 - 2x + 3))' \cdot e^x + (x^2 - 2x + 3) \cdot (e^x)' = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 3)e^x = (x^2 + 3)e^x$. Funkce i derivace funkce jsou definovány na $\mathbb{R}$.

Příklad 1 (c) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na jednotlivé sčítance použijeme vzorec pro $(c \cdot x^\alpha)' = c\alpha \cdot x^{\alpha-1}$. Funkce je definována na $[0, \infty)$, neboť potřebujeme nezáporné číslo pod sudou omocninou. Derivace funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladné číslo pod sudou omocninou ve jmenovateli.

Příklad 1 (d) $(x \log x + x \log_3 x + 2e^x)' = x' \log x + x(\log x)' + x' \log_3 x + x(\log_3 x)' + (2e^x)' = \log x + x \cdot \frac{1}{x} + \log_3 x + x \cdot (\frac{\log x}{\log 3})' + 2e^x = \log x + 1 + \log_3 x + \frac{1}{\log 3} + 2e^x$.

Funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladná číslo uvnitř logaritmu. Derivace funkce je definována na $(0, \infty)$ ze stejného důvodu.

Příklad 1 (e) $((\frac{3}{2})^x)' = (e^{x \cdot \log \frac{3}{2}})' = \log \frac{3}{2} \cdot e^{x \cdot \log \frac{3}{2}} = \log \frac{3}{2} \cdot (\frac{3}{2})^x$, nebo lze alternativně použít vzorec $c \cdot a^x = c \log a \cdot a^x$. Funkce i derivace funkce jsou definovány na $\mathbb{R}$, neboť mocněný výraz je kladný.

Příklad 1 (f) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na jednotlivé sčítance použijeme vzorec pro $(c \cdot x^\alpha)' = c\alpha \cdot x^{\alpha-1}$. Funkce i derivace jsou definovány na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, neboť potřebujeme nenulové číslo ve jmenovateli.

Příklad 1 (g)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 - 2x + 7}{x^2 + 5x - 6} \right)' &= \frac{(x^2 - 2x + 7)' \cdot (x^2 + 5x - 6) - (x^2 - 2x + 7) \cdot (x^2 + 5x - 6)'}{(x^2 + 5x - 6)^2} = \\ &= \frac{(2x - 2) \cdot (x^2 + 5x - 6) - (x^2 - 2x + 7) \cdot (2x + 5)}{(x^2 + 5x - 6)^2} = \frac{2x^3 + 8x^2 - 22x + 12 - (2x^3 + x^2 + 4x + 35)}{(x^2 + 5x - 6)^2} = \frac{7x^2 - 26x - 23}{(x^2 + 5x - 6)^2}, \end{aligned}$$

kde jsme využili vzorce pro derivaci podílu. Funkce i derivace funkce jsou definovány na $\mathbb{R} \setminus \{-6, 1\}$ kvůli nenulovosti jmenovatele.

Příklad 1 (h) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorec $(c \cdot \log x)' = c \cdot \frac{1}{x}$ a $(c \cdot \cos x)' = c \cdot (-\sin x)$. Funkce je definována na $(0, \infty)$, neboť potřebujeme kladná číslo uvnitř logaritmu. Derivace je pak také definována na $(0, \infty)$.

Příklad 1 (i)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x \cos x - 2}{\log x} \right)' &= \frac{(x \cos x - 2)' \cdot (\log x) - (x \cos x - 2) \cdot (\log x)'}{(\log x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x - x \sin x) \cdot (\log x) - (x \cos x - 2) \cdot \frac{1}{x}}{(\log x)^2} = \frac{x(\cos x - x \sin x) \cdot (\log x) - x \cos x + 2}{x(\log x)^2}, \end{aligned}$$

kde jsme využili vzorec pro derivaci podílu. Funkce i derivace funkce jsou definovány na $(0, \infty) \setminus \{0\}$ kvůli definičnímu oboru logaritmu a požadavku na nenulovost jmenovatele.

Příklad 1 (j) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorec $(c \cdot \tan x)' = c \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ a $(c \cdot \sin x)' = c \cdot \cos x$. Funkce je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, neboť to je omezení plynoucí z definičního oboru funkce tangens. Derivace je pak také definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 1 (k) $(\sin x \cos x - \tan x)' = (\sin x)' \cos x + \sin x(\cos x)' - (\tan x)' = \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}$. Funkce je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, neboť to je omezení plynoucí z definičního oboru funkce tangens. Derivace je pak také definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 1 (l) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorec $(c \cdot \arcsin x)' = c \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $(c \cdot \operatorname{arccot} x)' = c \cdot \frac{-1}{1+x^2}$. Funkce je definována na $[-1, 1]$, neboť to je omezení plynoucí z definičního oboru funkce arcussinus. Derivace je pak definována na $(-1, 1)$, neboť ještě navíc požadujeme nenulovost jmenovatele.

Příklad 1 (m) Derivace součtu je rovna součtu derivací, takže na sčítance použijeme vzorec $(c \cdot \arccos x)' = c \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $(c \cdot \operatorname{arccot} x)' = c \cdot \frac{-1}{1+x^2}$. Funkce je definována na $[-1, 1]$, neboť to je omezení plynoucí z definičního oboru funkce arcuscosinus. Derivace je pak definována na $(-1, 1)$, neboť ještě navíc požadujeme nenulovost jmenovatele.

Příklad 2 (a) Nahlédneme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme za věty o derivaci složené funkce

$$((x^2 + 50x + 12)^{78})' = 78(x^2 + 50x + 12)^{77}(x^2 + 50x + 12)' = 78(x^2 + 50x + 12)^{77}(2x + 50).$$

Odtud vidíme, že i $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$

Příklad 2 (b) Vidíme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{7\}$. Použijeme vzorce pro derivaci součinu tří funkcí $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$. Počítejme

$$\begin{aligned} (x^3(x+2)^8(x-7)^{-11})' &= 3x^2 \cdot (x+2)^8(x-7)^{-11} + x^3 \cdot 8(x+2)^7 \cdot (x-7)^{-11} + x^3(x+2)^8 \cdot (-11)(x-7)^{-12} \\ &= -\frac{3x^2(x+2)^7(31x+14)}{(x-7)^{-12}}. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

Příklad 2 (c) Je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme

$$(\operatorname{arccotan}(2x))' = \frac{1}{1+(2x)^2}(2x)' = \frac{2}{1+4x^2}$$

a vidíme, že $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (d) Je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme dle pravidla pro derivaci součinu

$$\left(\frac{3x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{3 \cdot (x^2+1) - (3x-2) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2}$$

Příklad 2 (e) Spočítáme, že $x^2 + x + 2 > 0$ na $\mathbb{R}$, a tudíž $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme derivaci

$$(\log(x^2 + x + 2))' = \frac{1}{x^2 + x + 2} \cdot (x^2 + x + 2)' = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 2}.$$

Z toho je vidno, že i $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (f) Je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme derivaci

$$(\cos(x^3 - x + 2)^9)' = -\sin(x^3 - x + 2)^9 \cdot ((x^3 - x + 2)^9)' = -\sin(x^3 - x + 2)^9 \cdot 9(x^3 - x + 2)^8 \cdot (3x^2 - 1).$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (g) Chceme, aby výraz v odmocnině byl kladný. Odtud dostáváme $\mathcal{D}_f = [-2, 2]$. Spočítáme derivaci

$$(\sqrt{4-x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (4-x^2)' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = (-2, 2)$.

Příklad 2 (h) Snadno nahlédneme, že $\mathcal{D}_f = (0, \infty) \setminus \{1\}$. Spočítáme derivaci

$$\left(\frac{1}{\log x}\right)' = -\frac{1}{\log^2 x} \cdot (\log x)' = -\frac{1}{x \log^2 x}.$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = (0, , \infty) \setminus \{1\}$.

Příklad 2 (h) Vidíme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme

$$(\cos^9(x^3 - x + 2))' = 9 \cos^8(x^3 - x + 2) \cdot (\cos(x^3 - x + 2))' = 9 \cos^8(x^3 - x + 2) \cdot (-\sin(x^3 - x + 2)) \cdot (3x^2 - 1).$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (j) Vidíme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme

$$(\sin(\sin(\sin x)))' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot (\sin(\sin x))' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x.$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (k) Spočítáme, že $\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0$ právě tehdy, když $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) = \mathcal{D}_f$. Spočítáme

$$\left(2 \log \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = 2 \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{8x}{x^4-1}.$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Příklad 2 (l) Vidíme, že $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Spočítáme

$$(\sin^2 x - \sin(x^2))' = 2 \sin x \cdot \cos x - \cos(x^2) \cdot 2x.$$

Odtud $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (m) Dostáváme sadu podmínek $x > 0, \log^3 x > 0$ a $\log^2(\log^3(x)) > 0$. Dopočítáme se, že $\mathcal{D}_f = (1, \infty) \setminus \{e\}$. Spočítáme

$$\begin{aligned} (\log(\log^2(\log^3(x))))' &= \frac{1}{\log^2(\log^3(x))} \cdot (\log^2(\log^3(x)))' = \frac{1}{\log^2(\log^3(x))} \cdot 2 \log(\log^3(x)) \cdot (\log(\log^3(x)))' \\ &= \frac{2}{\log(\log^3(x))} \cdot \frac{1}{\log^3(x)} \cdot (\log^3(x))' = \frac{2}{\log(\log^3(x)) \log^3(x)} \cdot 3 \log^2(x) \cdot (\log(x))' \\ &= \frac{6}{\log(\log^3(x)) \log(x)x}. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že $\mathcal{D}_{f'} = (1, \infty) \setminus \{e\}$.

Příklad 2 (n)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

Definiční obor f

$$9 - x^2 > 0 \iff (3-x)(3+x) > 0 \iff x \in (-3, 3) = D(f)$$

Derivace f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \right)' = \frac{x' \cdot \sqrt{9-x^2} - x \cdot (\sqrt{9-x^2})'}{(\sqrt{9-x^2})^2} = \frac{1 \cdot \sqrt{9-x^2} - x \cdot \frac{1}{2}(9-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (9-x^2)'}{9-x^2} = \\ &= \frac{\sqrt{9-x^2} - \frac{x}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot (-2x)}{9-x^2} = \frac{9-x^2+x^2}{(9-x^2) \cdot \sqrt{9-x^2}} = 9 \cdot (9-x^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Definiční obor f' $D(f') = (-3, 3)$

Příklad 2 o

$$f(x) = \frac{x^2(1-x)^3}{1+x}$$

Definiční obor f $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Derivace f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2(1-x)^3}{1+x} \right)' = \frac{(x^2(1-x)^3)' \cdot (1+x) - (x^2(1-x)^3) \cdot (1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{\left((x^2)'(1-x)^3 + x^2((1-x)^3)' \right) \cdot (1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{(2x(1-x)^3 + x^2(3(1-x)^2 \cdot (1-x)')) \cdot (1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} = \frac{2x(1-x)^3(1+x) - 3x^2(1-x)^2(1+x) - x^2(1-x)^3}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{x(1-x)^2(2(1-x^2) - 3x(1+x) - x(1-x))}{(1+x)^2} = \frac{x(1-x)^2(2-2x^2-3x-3x^2-x+x^2)}{(1+x)^2} = \frac{x(1-x)^2(2-4x^2-4x)}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Příklad 2 (p)

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Definiční obor f $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Derivace f

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (-1)(-2)x^{-3} = 2e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^3}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Příklad 2 (q)

$$f(x) = x^x$$

Definiční obor f $D(f) = (0, \infty)$, protože z definice obecné mocniny plyne, že $x^x = e^{x \log x}$.

Derivace f

Využijeme vzorec $a = e^{\log a}$ pro $a > 0$.

$$f'(x) = (x^x)' = (e^{x \log x})' = e^{x \log x} \cdot (x \log x)' = e^{x \log x} \cdot (x' \cdot \log x + x \cdot (\log x)') = e^{x \log x} \cdot \left(\log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\log x + 1)$$

Definiční obor f'

$$D(f') = (0, \infty)$$

Příklad 2 (r)

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Definiční obor f

$$D(f) = (0, \infty)$$

Derivace f

Využijeme vzorec $a = e^{\log a}$ pro $a > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x} \log \frac{1}{x}}\right)' = e^{\frac{1}{x} \log \frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x} \log \frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\left(\frac{1}{x}\right)' \log x + x \cdot (\log x)'\right) = \\ &= \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \log x + x \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-\log x}{x^2} + 1\right) \end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = (0, \infty)$$

Příklad 2 (s)

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x}$$

Definiční obor f

Opět z definice obecné mocniny plyne, že je potřeba, aby $\sin x > 0$. Tedy $D(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi)$.

Derivace f

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{\cos x \cdot \log \sin x})' = e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot (\cos x \cdot \log \sin x)' = e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot ((\cos x)' \cdot \log \sin x + \cos x \cdot (\log \sin x)') = \\ &= e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot \left(-\sin x \log \sin x + \cos x \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)'\right) = e^{\cos x \cdot \log \sin x} \cdot \left(-\sin x \log \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right) \end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi).$$

Příklad 2 (t)

$$f(x) = \arcsin(\cos x)$$

Definiční obor f Definiční obor $\arcsin$ je interval $[-1, 1]$ a obor hodnot $\cos$ je $[-1, 1]$. Proto $D(f) = D(\cos) = \mathbb{R}$.

Derivace f

$$f'(x) = (\arcsin(\cos x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\cos x)^2}} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R}$$

Příklad 2 (u)

$$f(x) = \log(\arccos x)$$

Definiční obor f

$$D(f) = [-1, 1)$$

Derivace f

$$f'(x) = (\log(\arccos x))' = \frac{1}{\arccos x} \cdot (\arccos x)' = \frac{1}{\arccos x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Definiční obor f' $D(f') = (-1, 1)$ a v bodě -1 má funkce pouze jednostrannou derivaci.**Příklad 2 (v)**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{2}}{x}$$

Definiční obor f

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Derivace f

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{2}}{x} \right)' = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{x} \right)^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{x} \right)' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{x^2}} \cdot \sqrt{2} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2}{2+x^2} \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2+x^2}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Příklad 2 (w)

$$f(x) = e^{x^2-x+1} - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$$

Definiční obor f

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Derivace f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{x^2-x+1} - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}} \right)' = e^{x^2-x+1} \cdot (x^2-x+1)' - \frac{1}{\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}} \right)' = \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}} = \\ &= e^{x^2-x+1} \cdot (2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} \right)' = e^{x^2-x+1} \cdot (2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(e^{2x})' \cdot (e^{2x}+1) - e^{2x} \cdot (e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2} = \\ &= e^{x^2-x+1} \cdot (2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x} \cdot (e^{2x}+1) - e^{2x} \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = e^{x^2-x+1} \cdot (2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x}(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} = \\ &= e^{x^2-x+1} \cdot (2x+1) - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{e^{2x}(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} \end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R}$$

Příklad 2 (x)

$$f(x) = \arctan \sqrt{x^2-1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Definiční obor f

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus (0, 1)$$

Derivace f

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\arctan \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)' = \\
&= \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2 - 1})^2} \cdot (\sqrt{x^2 - 1})' - \frac{(\log x)' \cdot \sqrt{x^2 - 1} - \log x \cdot (\sqrt{x^2 - 1})'}{(\sqrt{x^2 - 1})^2} = \\
&= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot (x^2 - 1)' - \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2 - 1} - \log x \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{x^2 - 1})^{-1} \cdot (x^2 - 1)'}{x^2 - 1} = \\
&= \frac{2x}{2x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x^{-1} \sqrt{x^2 - 1} - \log x \cdot \frac{2x}{2} \cdot 2x}{x^2 - 1} = \\
&= \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \log x \cdot 2x^2}{x^3 - x}
\end{aligned}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus (0, 1)$$

Příklad 2 (y)

$$f(x) = x (\arcsin(x^3))^2$$

Definiční obor f $D(f) = [-1, 1]$

Derivace f

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x (\arcsin(x^3))^2 \right)' = x' \cdot (\arcsin(x^3))^2 + x \cdot \left((\arcsin(x^3))^2 \right)' = (\arcsin(x^3))^2 + x \cdot 2 \cdot \arcsin(x^3) \cdot (\arcsin(x^3))' = \\
&= (\arcsin(x^3))^2 + 2x \cdot \arcsin(x^3) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (x^3)^2}} \cdot (x^3)' = (\arcsin(x^3))^2 + 2x \cdot \arcsin(x^3) \cdot \frac{3x^2}{\sqrt{1 - x^6}}
\end{aligned}$$

Definiční obor f'

$D(f') = (-1, 1)$ a v krajních bodech existují jednostranné derivace.