Limita funkce

Při řešení limity funkcí můžeme díky Heineho větě využívat již známých vět jako jsou: Věta o aritmetice limit, věty o policajtech, nulová · omezená apod. Dále se také při výpočtech často využívá dělení polynomů, rozklady na součin a binomická věta.

---

1 Vypočtěte limity:

(a) $\lim_{x\to 5} \frac{x-2}{6}$

(b) $\lim_{x\to \pi} \frac{\cos x}{x}$

(c) $\lim_{x\to \infty} \frac{4x^2+\log x}{3x^2}$

(d) $\lim_{x\to \infty}(2^x - 3^x)$

(e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$

(f) $\lim_{x\to \infty} \frac{\log(1+2^x)}{3x}$

(g) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)..(1+nx)-1}{x}$

(j) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1}$

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$

(l) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

(m) $\lim_{x\to -7} \frac{x+7}{x^2+14x+49}$

(n) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

(o) $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1}$

*(p) $\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+x^3+...+x^n-n}{x-1}$

Hint: Pište $-n$ jako $-1-1-\ldots-1$.

✠(q) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$

[1] (a) $\frac{1}{2}$; (b) $-\frac{1}{\pi}$; (c) $\frac{4}{3}$; (d) $-\infty$; (e) 4; (f) $\frac{\log 2}{3}$; (g) 0; (h) 6; (i) $\frac{n(n+1)}{2}$; (j) $\frac{1}{4}$; (k) 10; (l) $\frac{1}{2}$; (m) neexistuje; (n) $\frac{49}{24}$; (o) $\frac{n}{m}$; (p) $\frac{n(n+1)}{2}$; (q) $\frac{n(n+1)}{2}$;

Poučka. Standardním nástrojem při řešení limit s odmocninou je následující vzorec:

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1}B^0 + A^{n-2}B^1 + ... + A^1B^{n-2} + A^0B^{n-1})$$

---

2 Vypočtěte limity funkcí s odmocninou:

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

(b) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$

(c) $\lim_{x\to \infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

(e) $\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

(f) $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

!(g) $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

*(h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1+\frac{x}{2}}}$

*(i) $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}$

*(j) $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

*(k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[m]{1+bx}}{x}$

[2] (a) 4; (b) $\frac{4}{3}$; (c) 1; (d) $\frac{3}{2}$; (e) $\frac{1}{4}$; (f) $\frac{12}{5}$; (g) $\frac{4}{27}$; (h) $\frac{7}{36}$; (i) 1; (j) $\frac{1}{2}$; (k) $\frac{a}{n}-\frac{b}{m}$;

Věta (Věta o limitě složené funkce se spojitou vnější funkcí: VOLSF (s))**.** Buďte $f,\ g$ funkce, $B \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^*$. Nechť dále platí podmínky:

(a) $\lim_{x\to c} g(x) = B$;

(b) funkce f je v bodě B spojitá.

Potom platí: $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(B)$.

Věta (Věta o limitě složené funkce s vnitřní funkcí „vyhýbající se své limitě“ VOLSF (p))**.** Nechť $f,\ g$ jsou funkce, $c, B, A \in \mathbb{R}^*$. Dále platí podmínky:

(a) $\lim_{x\to c} g(x) = B$ a $\lim_{y\to B} f(y) = A$;

(b) $\exists \delta > 0\ \forall x \in P(c,\delta) : g(x) \neq B$

Potom platí: $\lim_{x\to c} f(g(x)) = A$.

Poučka. Při vyhodnocení limit funkcí se často využívají následující výsledky. Jde o tzv. známé limity:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = \lim_{y\to 1} \frac{\log(y)}{y-1} = 1$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

---

3 Vypočtěte limity funkcí s pomocí známých limit:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{5^x-1}{x}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{3x^2}$

(e) $\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)$

(f) $\lim_{x\to 0_+} \frac{\log(1+2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+e^{2x^2})}{\ln(x^2+e^{3x^2})}$

(h) $\lim_{x\to\infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 2^{-\frac{1}{x}})$

(i) $\lim_{x\to 1}(1-x)\log_x 13$

(j) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x - \sin 5x}{x}$

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

(l) $\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(4^x-x^2)}{1-\cos x}$

!(m) $\lim_{x\to\pi} \operatorname{cotg}^2(x)\ln(-\cos x)$

(n) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

(o) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x^2)}}{1-\cos(x)}$

(p) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{1-\cos(x)}$

∗(q) $\lim_{x\to\infty} \sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}$

Hint: Použijte vztah: $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

✠(r) $\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin a}}{x-a}$

[3] (a) 3; (b) $\ln 5$; (c) 1; (d) $-\frac{1}{6}$; (e) -3; (f) 2; (g) $\frac{3}{4}$; (h) $2\ln 2$; (i) $\log 13$; (j) -1; (k) $\frac{1}{4}$; (l) $\log 16$; (m) $\frac{1}{2}$; (n) -1; (o) $\sqrt{2}$; (p) ∞; (q) 0; (r) $\frac{-\cos a}{\sin^2 a}$;

4 Vypočtěte limity složených funkcí:

(a) $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{2}{x^2}}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \log_3 \frac{x-1}{x+1}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \log_{\frac{1}{3}}(9(1-\cos^2\frac{1}{x})x^2)$

(d) $\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{x}-\ln x-\pi x^2}{12x+4x^2-13}\right)$

(e) $\lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$

(f) $\lim_{x\to 8} e^{\frac{\sqrt{2x+9}-5}{\sqrt[3]{x}-2}}$

(g) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)$

(h) $\lim_{x\to\infty} \arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

(i) $\lim_{x\to\infty} \arcsin\frac{1-x}{1+x}$

(j) $\lim_{x\to 3} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x^3+x^2-9}}\right)$

(k) $\lim_{x\to 0} \operatorname{arccotg}\left(x\log\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\right)$

(l) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x^7-12x^2+3}{27x^7-12x^2+3}}$

[4] (a) 1; (b) 0; (c) -2; (d) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$; (e) $\cos\frac{1}{4}$; (f) $e^{\frac{12}{5}}$; (g) $\frac{\pi}{4}$; (h) $\frac{\pi}{3}$; (i) $-\frac{\pi}{2}$; (j) $\frac{\pi}{6}$; (k) $\frac{\pi}{2}$; (l) $\frac{1}{3}$;

Poučka. Známá limita:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Nezřídka se tato známá limita využívá společně s VOLSF (se spojitou vnější funkcí) a zápisem:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\log\left(f(x)\right)}$$

---

5 Limity typu „1^∞“:

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x-1}\right)^{2x}$

!(b) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$

(c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x^2}{3x^2+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

(d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(e) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

(f) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-2}\right)^{x+1}$

[5] (a) $e^{\frac{2}{3}}$; (b) e^a; (c) 1; (d) neexistuje; (e) 1; (f) e^6;

---

6 Vypočtěte limity složených funkcí (těžké příklady):

(a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$

(b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

(c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$

(d) $\lim_{x\to\pi}\left(-\cos x\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

(e) $\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\operatorname{cotg}x}$

(f) $\lim_{x\to 0}\log(1-\frac{1}{x^2\operatorname{tg}\frac{1}{x}})(x^2\operatorname{tg}\frac{1}{x})$

(g) $\lim_{x\to\infty}\ln(1-\frac{1}{x^2\operatorname{tg}\frac{1}{x}})\frac{3x^3+20x^2}{2x^2+1}$

(h) $\lim_{x\to 0_+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

✠(i) $\lim_{x\to 0}(\sin(x+\frac{\pi}{2}))^{\operatorname{tg}\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)}\left(\frac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg}x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}$

[6] (a) $\sqrt{e}$; (b) $\sqrt{15}$; (c) e; (d) $e^{-\frac{1}{2}}$; (e) e^{-2}; (f) neexistuje; (g) $-\frac{3}{2}$; (h) $e^{-\frac{1}{2}}$; (i) 1;

7 Těžké limity bez l'Hospitalova pravidla:

> *Hint:* Bez l'Hospitala lze řešit opakovaným použitím stejného triku $-n = -1 - 1 - \ldots - 1$.

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{n}{1-x^n} - \frac{m}{1-x^m} = \frac{n-m}{2}$, kde $n, m \in \mathbb{N}$

Věta (Heineho věta)**.** Nechť c, $A \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce, pak NVJE:

(a) $\lim_{x\to c} f(x) = A$;

(b) Pro libovolnou posloupnost splňující $(H1)$ *a* $(H2)$

(H_1) $\lim_{n\to\infty} x_n = c$,

(H_2) $\forall n \in \mathbb{N}: \ x_n \neq c$,

Potom platí: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Poučka. Heineho věta se použije prakticky při řešení každé složitější posloupnosti, neboť je většinou jednodušší pracovat s limitou funkce než s limitou posloupnosti, protože na to máme více nástrojů.

---

8 Limity posloupností:

> *Hint:* Přepište si příklady jako limitu funkce a použijte Heineho větu.

(a) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1)$

(b) $\lim_{n\to\infty} n(\sin \frac{1}{2n-1})$

(c) $\lim_{n\to\infty} (\frac{n^2+1}{n^2-1})^{\sqrt{n^3+3n^2}}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi n^2+1}{n^2-1})$

(e) $\lim_{n\to\infty} e^{(\frac{6n^3+\log n}{n^3-\sqrt{n}})}$

✠(f) $\lim_{n\to\infty} n^8(2\cos(\frac{1}{n^2}) - 2 + \frac{1}{n^4})$

[8] (a) $\log 2$; (b) $\frac{1}{2}$; (c) 1; (d) 0; (e) e^6; (f) $\frac{1}{12}$;

---

9 Jednostranné limity funkcí:

(a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$

(b) $\lim_{x\to 5^-} \frac{1}{x-5}$

(c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

(d) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-1}$

(e) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

(f) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+x-6}{|x-2|}$

(g) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{\log(3-x)}$

(h) $\lim_{x\to 0^-} (1 + \arcsin 4x)^{\frac{1}{-3x}}$

(i) $\lim_{x\to\infty} \arcsin \frac{x+1}{x}$

(j) $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x})$

[9] (a) ∞; (b) $-\infty$; (c) 0; (d) ∞; (e) 1; (f) 5; (g) $-\infty$; (h) $e^{-\frac{4}{3}}$; (i) neexistuje; (j) 0;