Limita posloupnosti

Definice (Vlastní limita posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ je limita posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$$

Definice (Divergentní posloupnost)**.** Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje a píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ jestliže platí:

$$\forall K > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 : |a_n| > K$$

---

1 Podle definice limity posloupnosti ověřte následující rovnosti.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ 1 & a = 1 \\ \infty & a > 1 \\ \text{neexistuje} & a \leqslant -1 \end{cases}$

---

2 Vypočtěte limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} n$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

(c) $\lim_{n\to\infty} e^n$

(d) $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n$

(e) $\lim_{n\to\infty} n^2$

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$

(g) $\lim_{n\to\infty} e^{-n}$

(h) $\lim_{n\to\infty} 2^n$

(i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}$

(j) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(k) $\lim_{n\to\infty} \ln n$

(l) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}$

(m) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$

(n) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n$

(o) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(p) $\lim_{n\to\infty} \cos(\pi n)\sqrt{n}$

[2] (a) ∞; (b) 0; (c) ∞; (d) 0; (e) ∞; (f) 0; (g) 0; (h) ∞; (i) ∞; (j) 0; (k) ∞; (l) 0; (m) neexistuje; (n) neexistuje; (o) 0; (p) neexistuje;

Věta (Aritmetika limit - **VOAL**)**.** Má-li pravá strana smysl, pak platí:

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) + (\lim_{n\to\infty} b_n)$

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

Věta (Omezená krát nulová)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti splňující:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (nulová)

(b) Od jistého indexu n_0 platí: $|b_n| < K \in \mathbb{R}$ (omezená)

Pak platí: $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Poučka. Tradičním nástrojem při řešení limit s odmocninou je následující vzorec:

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1}B^0 + A^{n-2}B^1 + ... + A^1B^{n-2} + A^0B^{n-1})$$

$\boxed{3}$ Vypočtěte limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{10000n+1}$
(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$
(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{\pi n^2+1}$
(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} - n$
(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4-n^3+4}{n^4+16n^3-1}$
(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+4}{n^2+16n-1}$
(g) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n}$
(h) $\lim_{n\to\infty} (\frac{1+2+3+\ldots+n}{2+n} - \frac{n}{2})$
(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$
(j) $\lim_{n\to\infty} (\frac{2n^7-23n-1}{5n^7-23n-1})^3$
(k) $\lim_{n\to\infty} (\frac{n-1}{2n+1})^{10}$
(l) $\lim_{n\to\infty} (\frac{n^5-23n-1}{n^5-23n^3+12n^2-1})^{1000}$

[3] (a) 0; (b) 1; (c) $\frac{1}{\pi}$; (d) $-\infty$; (e) 3; (f) ∞; (g) $\frac{1}{2}$; (h) $-\frac{1}{2}$; (i) $\frac{1}{3}$; (j) $\frac{8}{125}$; (k) $\frac{1}{1024}$; (l) 1;

Věta (O jednom policajtovi)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti splňující:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

(b) Od jistého indexu n_0 platí: $b_n > a_n$

Potom platí: $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Věta (O dvou policajtech - **2P**)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti splňující:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b \in \mathbb{R}$

(b) Od jistého indexu n_0 platí: $a_n < b_n < c_n$

Pak je posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní a platí: $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

$\boxed{4}$ Vypočtěte limity: Tuhle sadu příkladů je potřeba vylepšit.. je tu náhodné smetí!!!

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$
(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$
(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$
(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$
(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}\sin(n!)}{n+1}$
(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{\cos(n)}$
(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 3^n}{4^n}$
(h) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1}$
(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} - \sqrt[3]{n}$
(j) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+4^n}$
(k) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+11} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2}}$
(l) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n - \cos n^2}{n^2+17}$
(m) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+7n+1} - \sqrt{n^2+1}$
(n) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+3^n+13^n+\ln n}$
(o) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

[4] (a) 0; (b) 0; (c) 0; (d) 0; (e) 0; (f) neexistuje; (g) 0; (h) 0; (i) 0; (j) 4; (k) $\frac{5}{3}$; (l) 0; (m) 0; (n) 13; (o) 1;

Věta (Růstová škála)**.** Od jistého hodnoty n platí:

$$\log(\log(n)) \ll 1000\log n \ll n^{\frac{1}{1000}} \ll n \ll n^{1000} \ll 1,0001^n \ll 1000^n \ll n! \ll n^n$$

kde zápis $a_n \ll b_n$ znamená „a_n roste výrazně pomaleji než b_n“, tedy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty.$$

**Lze snadno ukázat, že Relace $\ll$ je tranzitivní.*

Poučka. Stejně jako při práci s polynomy je vhodné vytýkat nejrychleji rostoucí výraz.

---

5 Vypočtěte limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+102\log n+n^2}{\sqrt{n}-n^{\frac{3}{2}}+2^n}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n+n^2}{\sqrt{n}-3^{2n}}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n-2\log n+11n^2}}{\sqrt{n}-n}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{4n-2\log n+11\cdot 27^n}}{(\frac{7}{2})^n+2^n}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^n+2^n+3^n+4^n+5^n}{(5.0001)^n}$

$*$(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n!}{n^{\frac{n}{2}}+2^n}$

[5] (a) 0; (b) 0; (c) $-\sqrt{11}$; (d) ∞; (e) 0; (f) ∞;

Věta (N-tá odmocnina)**.** (a) Pro $c \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

---

6 Vypočtěte limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+3^n+13^n+\ln n}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n^n+2^n+6^n}}{n}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{2n^n+2^n+6^n}}{\sqrt{n}+3}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3^n+2^n}}{\sqrt[2n]{4^n+3^n}}$

[6] (a) 13; (b) 1; (c) 1; (d) $\frac{3}{2}$;

Definice (Eulerovo číslo)**.**

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Poučka. Příklady vedoucí na e mohou být mnohem záludnější, v takovém případě je výhodné použít Heineho větu a limitu posloupnosti vyřešit jako limitu funkce.

---

7 Vypočtěte limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

(c) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

(d) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$

(e) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}$

(f) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+4}{n-2}\right)^{n+1}$

[7] (a) e^2; (b) $\sqrt{e}$; (c) $\frac{1}{e}$; (d) e^a; (e) $\frac{1}{e}$; (f) e^6;

$\boxed{\mathbf{8}}$ Příklady zápočtové obtížnosti:

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-\sqrt[3]{n^3+3n}\right)\left(\frac{3n^3+2n^2-n}{n+2n^3}\right)^3$

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\pi^n + e^n + \left(\frac{22}{7}\right)^n + 100n^{100}}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!-10^{4n}+n^n\cdot\cos n}{3\cdot n^n+100^{2n}-2\cdot n!}$