

Řady

Poučka (Významné příklady). Znamé příklady konvergentních řad:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Harmonická řada - divergentní)
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (Teleskopická řada)
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ pro $q \in (-1, 1)$ (Součet geometrické řady)
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Basilejský problém)
- (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (Alternativní definice Eulerova čísla)

Věta („Hraniční výsledky“). Hranice mezi divergentními a konvergentními příklady.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ konverguje pro $\varepsilon > 0$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^{1+\varepsilon} n}$ konverguje pro $\varepsilon > 0$

Věta (Nutná podmínka konvergence řady). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Poučka. Není-li tato podmínka splněna, tak řada nutně musí divergovat.

1 Vyšetřete konvergenci následujících řad:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+4}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{5}{6})^{\frac{n}{2}}$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
- (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$
- (j) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (\frac{1}{6})^n)$
- (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{\sqrt{n}}$
- (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$

1 (a) D; (b) D; (c) K; (d) D; (e) K; (f) K; (g) D; (h) K; (i) D; (j) D; (k) D; (l) K;

Věta ((Základní vlastnosti součtu řady). Mají-li pravé strany smysl, pak platí:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (Linearita)
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ (Konvergence nezávisí na konečném počtu členů)

Věta (Srovnávací kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy, které splňují $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$, pak platí:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje

2 Vyšetřete konvergenci následujících řad:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{17n+2}{n^2}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^4-4}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2\sqrt{n+10}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n+n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n13^n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2}{2^{-n}+n^2+\log n}$

2 (a) D; (b) K; (c) D; (d) K; (e) K; (f) K; (g) K; (h) K; (i) K; (j) D;

Věta (Limitní srovnávací kriterium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje limita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R}^*$$

(a) Pro $A \in (0, \infty)$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(b) Pro $A \in (0, \infty)$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje

(c) Pro $A = 0$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(d) Pro $A = \infty$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

3 Vyšetřete konvergenci následujících řad:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{17}{n^2}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1+n^2}{1+n^3}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1) \arctg 2n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{n^{\frac{5}{2}}}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{3}-1}{n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2+3} - \sqrt[3]{n^3+n}$

*(k) $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \sin\left(\frac{1}{n^2+3}\right)(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3})$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{1+n^4}$

*(l) $\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \log\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right) \operatorname{tg} \frac{1}{n}$

3 (a) K; (b) D; (c) K; (d) K; (e) D; (f) K; (g) K; (h) D; (i) K; (j) K; (k) $K \iff \alpha < \frac{3}{2}$; (l) $K \iff \beta < 3$;

Věta (Cauchyho odmocninové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pokud existuje pevně zvolené číslo $q < 1$ takové, že $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Věta (Cauchyho limitní odmocninové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pak platí:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Konverguje
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverguje
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Řada může konvergovat i divergovat.

Věta (D'Alembertovo podílové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pokud existuje pevně zvolené číslo $q < 1$ takové, že $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Věta (D'Alembertovo limitní podílové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pak platí:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Konverguje
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverguje
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Řada může konvergovat i divergovat.

4 Vyšetřete konvergenci následujících řad:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4^n}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+3^n}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \sqrt{n}}{3^n}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + 9^n}{\sqrt{n} + e^{2n}}$
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot (3n-1)}{3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot (5n-2)}$
- (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}$
- * (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \right)^n$
- (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$

4 (a) K; (b) K; (c) K; (d) K; (e) K; (f) D; (g) K; (h) K; (i) K; (j) K;

Věta (Leibniz). Nechť posloupnost a_n splňuje následující podmínky:

- (a) je monotónní;
- (b) splňuje NPK (tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$).

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.

5 Vyšetřete absolutní a relativní konvergenci následujících řad:

- | | |
|---|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{5} - 1)$ | (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(1 + \sqrt{n+5} - \sqrt{n})$ |
| (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n-1}{4n^2-n-6}$ | !(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(k\pi)(\sqrt{n} - \sqrt{n-9})$ |
| (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{1}{n}$ | (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ |
| (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log \log n}$ | (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ |
| (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ | (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$ |
| (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ | !(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2(-1)^n}$ |

5 (a) RK; (b) D; (c) AK; (d) RK; (e) RK; (f) AK; (g) RK; (h) RK; (i) RK: $0 < \alpha \leq 1$, D: $\alpha \leq 0$, AK: $\alpha \geq 0$; (j) D pro $|z| > 1$ a $z = 1$, RK pro $z = -1$, AK pro $|z| < 1$; (k) RK; (l) RK;

6 Vyšetřete konvergenci následujících řad (zkoušková obtížnost):

- | | |
|---|---|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \sin\left(\frac{x}{7^n}\right), \quad x > 0$ | (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n(n+1)^4}{3^n \cdot n!}$ |
| (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ | (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{3^n+7^n}{7^n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ |
| (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)$ | (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2^{2^n}+1)}{\log(2^{4^n}+1)}$ |
| (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+(-1)^n}{1+n^2} \cdot (\ln(n^2+1) - \ln n^2)$ | ✠(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n((-1)^n+1)+1}{n(n+(-1)^n)} \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$ |
| (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^3+1+\sqrt{n})-\ln(n^3+1)}{\sin \frac{1}{n^2}}$ | |

6 (a) K; (b) RK; (c) RK; (d) D; (e) D; (f) K; (g) D; (h) K; (i) D;