Úvod – Opakovací a přípravné úlohy

1 V oboru reálných čísel řešte následující rovnice a nerovnice.

(a) $3^{2x} - 3^x - 6 = 0$

(b) $\ln(x^2 + 1) = 2\ln(3 - x)$

(c) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geqslant 0$

(d) $\dfrac{x - 2}{2x - 8} \geqslant 1$

(e) $\dfrac{x + 2}{x + 3} > \dfrac{2x + 3}{x + 6}$

(f) $\sin 2x = \sin x$

(g) $\sin x > \frac{1}{2}$

(h) $|\sin x| > \frac{1}{2}$

(i) $2\sin x + \cos x = 1$

(j) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geqslant \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

(k) $\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 5} = 1$

Absolutní hodnotu čísla $x \in \mathbb{R}$ definujeme následovně:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jestliže } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{jestliže } x < 0. \end{cases}$$

Například tedy platí $|2| = 2$, $|-4| = 4$, $|0| = 0$ a tak dále. Pokud $\mathbb{R}$ chápeme jako přímku, pak $|x|$ lze chápat jako *vzdálenost* čísla („bodu“) x od 0. Jsou-li $x, y \in \mathbb{R}$ čísla chápaná jako body na přímce $\mathbb{R}$, pak číslo $|x - y|$, tj. velikost jejich rozdílu, lze chápat jako *vzdálenost* bodu x od bodu y.

2 Řešte následující úlohy s absolutní hodnotou; rovnice a nerovnice řešte v oboru $\mathbb{R}$. Často se hodí nakreslit si vhodný obrázek.

(a) $|x + 1| + |x - 2| \leqslant 4$

(b) $||x - 3| - 2| = 1$

(c) $||x - 2| + 1| \leqslant 5$

(d) $|x^2 - 4x + 3| \leqslant |x^2 - 4|$

(e) Načrtněte funkci $y = ||||x| - 1| - 1| - 1|$.

(f) Rozborem možností ověřte, že platí

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\colon\ |a + b| \leqslant |a| + |b|\,.$$

∗(g) Popište množinu $\{x \in \mathbb{R}\colon\ ||||x| - 1| - 2| - 3| < 1\}$.

Základní disciplínou, jejíž spolehlivé zvládnutí je nutné pro správné matematické myšlení, je výroková logika. Primitivním (základním) pojmem výrokové logiky je *výrok*, který se obvykle vymezuje jako smysluplná výpověď která, má nějakou pravdivostní hodnotu. Není přitom důležité, jsme-li schopni tuto pravdivostní hodnotu odhalit.
Jednotlivé výroky je běžné značit velkými písmeny $A, B, C, \ldots$. Výroky můžeme spojovat do složitějších výroků pomocí *logických spojek*, z nichž ty základní jsou

$$\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow .$$

Speciální postavení má pak *negace*, značíme ji symbolem $\neg$. Je-li tedy A nějaký výrok, jeho negaci značíme $\neg A$. Podobně můžeme negovat složené výroky, např. $\neg(A \wedge B)$ apod.

3 Ukažte, že bez ohledu na pravdivostní hodnotu výroků A, B, C jsou následující výroky pravdivé.

(a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

(b) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

(c) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

(d) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(e) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

(f) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$

(g) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(h) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Přidáním proměnných (pro objekty naší teorie – například čísla) a kvantifikátorů se z výrokové logiky stává logika *predikátová*. Predikáty jsou jednoduché výpovědi o objektech (třeba číslech), například „$x = 5$“ nebo „$1 + 1 = 3$“ jsou predikáty. Pracujeme-li také s množinami, pak příklady predikátů mohou být „$x \in \mathbb{R}$“ a „$A \subseteq B$“. Takovýto jazyk už je dostatečný pro vyjádření všech výpovědí, které v rámci matematické teorie budeme potřebovat.
Budeme pracovat se dvěma kvantifikátory, a to s obecným kvantifikátorem $\forall$ („pro každé“) a s kvantifikátorem existenčním $\exists$ („existuje“). Píšeme-li např. $\forall\delta > 0$, resp. $\exists\delta > 0$ apod., implicitně tím současně říkáme, že $\delta \in \mathbb{R}$.

4 Nechť M je množina osob přítomných v posluchárně a nechť $W(x, y)$ znamená: osoba $x \in M$ zná příjmení osoby $y \in M$. Přeložte následující výroky do češtiny a zkoumejte jejich platnost:

(a) $\forall x \in M\ \exists y \in M : W(x, y)$

(b) $\forall y \in M\ \exists x \in M : W(x, y)$

(c) $\forall x \in M\ \forall y \in M : W(x, y)$

(d) $\exists x \in M\ \forall y \in M : W(x, y)$

(e) $\exists y \in M\ \forall x \in M : W(x, y)$

(f) $\exists x \in M\ \exists y \in M : W(x, y)$

5 Příklady na logické formule a absolutní hodnotu: rozhodněte o pravdivosti výroků a svůj závěr ilustrujte obrázkem.

(a) $\forall\delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$: $|x| < \delta$, právě když $(x > -\delta) \wedge (x < \delta)$.

(b) $\forall\delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$: jestliže $|x| > \delta$, pak $x > \delta$.

(c) $\forall\delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$: $|x| > \delta$, právě když $(x < -\delta) \wedge (x > \delta)$.

(d) $\forall\delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$: $|x| > \delta$, právě když $(x < -\delta) \vee (x > \delta)$.

(e) $\forall\delta > 0\ \forall c \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}$: $\big(|x - c| < \delta\big) \Leftrightarrow \big(x \in [c - \delta, c + \delta]\big)$

(f) $\forall z \in \mathbb{R}\ \exists x_1 \in \mathbb{R}\ \exists x_2 \in \mathbb{R}\colon x_1 \neq x_2 \wedge |z - x_1| = 5 \wedge |z - x_2| = 5$

$\boxed{6}$ Uvažme následující výroky:

(i) $\forall x \in M\ \exists y \in M\ \exists z \in M\colon x = y + z$

(ii) $\exists y \in M\ \forall x \in M\ \exists z \in M\colon x = y + z$

(iii) $\exists y \in M\ \exists z \in M\ \forall x \in M\colon x = y + z$

Které z nich jsou pravdivé a které nepravdivé, je-li
(a) $M = \mathbb{N}$, (b) $M = \mathbb{N} \cup \{0\}$, (c) $M = (0, 1)$, (d) $M = \{0\}$, (e) $M = \emptyset$?

$\boxed{7}$ Znegujte následující výroky a rozhodněte, jestli platí výrok, nebo jeho negace:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon x^2 + y^2 > 0$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{N}\colon (y \leqslant x) \wedge (y + 1 > x)$

∗(c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\colon \big(0 < |x - 1| < \delta\big) \Rightarrow \big(|x - 3| < \varepsilon\big)$

∗(d) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \big((x + 1 = 2) \wedge (x - 1 = 5)\big) \Rightarrow (x = x + 1)$

✠(e) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon \big(x \in (a, a + \varepsilon)\big) \Leftrightarrow \big(|x - \alpha| < 1\big)$

✠(f) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\colon \big(x \in (a, a + \varepsilon)\big) \Leftrightarrow \big(|x - \alpha| < 1\big)$

$\boxed{8}$ Příklady na důkazy matematickou indukcí – dokažte následující výroky:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\colon n \leqslant 2^n$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}\colon n^2 \leqslant 2^n$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(d) $\forall n \in \mathbb{N}\colon 6 \mid 10^n - 4$.

(e) Pro libovolná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ platí $|\sum_{i=1}^{n} x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

∗(f) $\forall n \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.

∗(g) Binomická věta je následující vzorec, který platí pro libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Je možné ho dokázat různými způsoby, matematická indukce je jedním z nich.

[1] (a) $x = 1$; (b) $x = \frac{4}{3}$; (c) $x \in [1, 2]$; (d) $x \in (4, 6]$; (e) $x \in (-6, -3) \cup \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$; (f) $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$; (g) $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$; (h) $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi)$; (i) $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{2k\pi, \pi - \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi\}$; (j) $x \in (-\infty, -4] \cup \{1\}$; (k) $x = 6$;

[2] (a) $\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$; (b) $\{0, 2, 4, 6\}$; (c) $[-2, 6]$; (d) $x \in \left[\frac{2-\sqrt{6}}{2}, \frac{7}{4}\right] \cup \left[\frac{2+\sqrt{6}}{2}, \infty\right)$; (e) ▲; (f) ▲; (g) $(-7, -5) \cup (5, 7)$;

[5] (a) 1; (b) 0; (c) 0; (d) 1; (e) 0; (f) 1;

[7] (a) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x^2 + y^2 \leqslant 0$, negace platí; (b) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{N}\colon (y > x) \vee (y+1 \leqslant x)$, negace platí; (c) $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}\colon \big(0 < |x-1| < \delta\big) \wedge \big(|x-3| \geqslant \varepsilon\big)$, negace platí; (d) $\exists x \in \mathbb{R}\colon \big((x+1=2) \wedge (x-1=5)\big) \wedge (x \neq x+1)$, negace neplatí; (e) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\colon \big[\big(x \notin (a, a+\varepsilon)\big) \wedge \big(|x-\alpha| < 1\big)\big) \vee \big[\big(x \in (a, a+\varepsilon)\big) \wedge \big(|x-\alpha| \geqslant 1\big)\big]$, negace neplatí; (f) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon \big[\big(x \notin (a, a+\varepsilon)\big) \wedge \big(|x-\alpha| < 1\big)\big) \vee \big[\big(x \in (a, a+\varepsilon)\big) \wedge \big(|x-\alpha| \geqslant 1\big)\big]$, negace neplatí;

[6] Řešení úlohy je v tabulce:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
(i)	0	1	1	1	1
(ii)	0	1	0	1	0
(iii)	0	0	0	1	0

Supremum, infimum

Definice. Supremum je „nejmenší horní závora“. Infimum je „největší dolní závora“.

Definice. Definujeme $\sup \varnothing = -\infty$, $\inf \varnothing = \infty$. Pro shora neomezenou $M \subseteq \mathbb{R}$ definujeme $\sup M = \infty$; podobně pro zdola neomezenou M definujeme $\inf M = -\infty$.

Věta (O supremu)**.** Každá podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum i infimum.

Věta (Archimédův axiom)**.** $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon x < n$.

9 Uvažujte množinu $M = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\colon\ n \in \mathbb{N}\right\}$

(a) Nalezněte infimum a supremum (zdůvodněte, proč infimum a supremum existuje)

(b) Nalezněte maximum a minimum (pokud existují)

10 Nalezněte supremum, infimum, maximum a minimum následujících množin.

(a) $A = [2, \pi)$

(b) $B = \mathbb{N}$

(c) $C = \{-3,\ 3.1,\ \sqrt{3}, \ln(2),\ \pi,\ e, \frac{22}{7}\}$

(d) $D = \big(\pi, \frac{22}{7}\big] \cap \mathbb{Q}$

(e) $X = \{\frac{n}{n+1}\colon\ n \in \mathbb{N}\}$

(f) $Y = \{1 - \frac{n}{n+1}\colon\ n \in \mathbb{N}\}$

(g) $Z = \{x < \frac{1}{x}\colon\ x \in \mathbb{R}\}$

(h) $W = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\colon\ n,\ m \in \mathbb{N}\}$

11 Uvažujme libovolnou množinu Ω. Platí nutně následující nerovnost?

$$\sup \Omega \geqslant \inf \Omega$$

12 Mějme dvě množiny $A, B \subset \mathbb{R}$, které jsou omezené (shora i zdola). Co lze obecně říci o supremu a infimu následujících množin?

(a) $A \cup B$

(b) $A \cap B$

(c) $A + B = \{a + b\colon\ a \in A,\ b \in B\}$

(d) $A \setminus B$

13 Je-li $A \subseteq \mathbb{R}$, definujeme $-A = \{-x\colon\ x \in A\}$. Postupně dokažte následující tvrzení.

(i) Číslo $h \in \mathbb{R}$ je horní závora $A \iff -h$ je dolní závora $-A$;

(ii) A je shora omezená $\iff -A$ je zdola omezená;

(iii) $\inf(-A) = -\sup(A)$.