

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)

1. ročník, zimní semestr – 1. termín dne 13. ledna 2025

Početní část

Příklad 1. Spočtete následující limitu funkce (své kroky stručně zdůvodněte):

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \sin(3x))^{\cotg(x)} (1 - \cos(x))}{x^2}$$

Příklad 2. Spočtete následující limitu posloupnosti (své kroky stručně zdůvodněte):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \operatorname{arctg}(n^{-\frac{3}{2}}) \operatorname{arccotg}(-n)$$

POZOR: Příklad 2. vyžaduje ke správnému řešení použití L'Hospitalova pravidla. Při vymýšlení tohoto zadání jsme nevěděli, že tato početní metoda nemá být zkoušena; byli jsme na to upozorněni až v průběhu písemky. Váha tohoto příkladu při hodnocení tak byla snížena na úroveň pouhého pomocného hodnocení.

V následujících termínech zkoušky se už nebudou vyskytovat příklady, k jejichž řešení by bylo nutné použít L'Hospitalovo pravidlo.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)

1. ročník, zimní semestr – 1. termín dne 13. ledna 2025

Teoretická část

Úloha A.

- (a) Napište definici vlastní limity funkce ve vlastním bodě. [2 body]
- (b) Definujte lokální maximum funkce. [2 body]
- (c) Napište, co se myslí výrokem, že „funkce f je rostoucí v bodě a “. [2 body]
- (d) Zformulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. [2 body]
- (e) Zformulujte Riemannovu větu o přerovnání řad. [2 body]

Úloha B.

- (a) Dokažte, že vlastní limita posloupnosti je jednoznačně určená, pokud existuje. [5 bodů]
- (b) Dokažte vzorec pro derivaci součinu dvou funkcí. [5 bodů]
- (c) Zformulujte a dokažte Leibnizovo kritérium konvergence nekonečných řad. [5 bodů]

Úloha C. Rozhodněte o platnosti následujících výroků a své odpovědi stručně zdůvodněte.

- (a) Konvergentní posloupnost racionálních čísel má racionální limitu. [1 bod]
- (b) Funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená, právě když nabývá svého maxima i minima. [1 bod]
- (c) Funkce sgn má v každém bodě derivaci. [1 bod]
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x^2 = -\infty$. [1 bod]
- (e) Pokud $B \subseteq \mathbb{R}$ a platí $s = \max B$, pak také $s = \sup B$. [1 bod]
- (f) Pokud má funkce f v bodě a ostré lokální maximum, pak $f'(a) = 0$. [1 bod]
- (g) Z každé posloupnosti lze vybrat podposloupnost, která má limitu. [1 bod]
- (h) Každá ryze monotónní funkce je prostá. [1 bod]
- (i) Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. [1 bod]
- (j) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ má přerovnání se součtem 1337. [1 bod]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasné patrné, že znáte jejich znění.