

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)

1. ročník, zimní semestr – 2. termín dne 22. ledna 2025

Početní část

Příklad 1. Spočtěte limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\ln(n+3) - \ln n)(\ln(n^n + \sin n))^2(\sqrt[n]{3} - 1)}{\ln^2 n}$$

Příklad 2. Spočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x^5 \frac{\ln\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^8}\right)}{\ln\left(\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^{10}}\right)} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{2x^9 + x^8 + 8} - 2}$$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n) \ln\left(\frac{1+n+n^2}{n^2+1}\right) e^{\frac{1}{n}}$$

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)

1. ročník, zimní semestr – 2. termín dne 22. ledna 2025

Teoretická část

Úloha A.

- (a) Definujte spojitost funkce v bodě a spojitost funkce na intervalu. [2 body]
- (b) Napište definici derivace funkce v bodě. [2 body]
- (c) Definujte součet řady, absolutní a relativní konvergenci řady. [2 body]
- (d) Zformulujte Cauchyovu větu o střední hodnotě. [2 body]
- (e) Zformulujte Weierstrassovu větu. [2 body]

Úloha B.

- (a) Zformulujte a dokažte Lemma o dvou polícijských pro posloupnosti. [5 bodů]
- (b) Dokažte, že limita součinu dvou posloupností je součin jejich limit.
Uvažujte pouze situaci, kdy limity obou posloupností jsou vlastní. [5 bodů]
- (c) Zformulujte a dokažte větu o existenci limity monotónní posloupnosti. [5 bodů]

Úloha C.

- (a) Pomocí „teleskopického součtu“ určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. [3 body]
- (b) Naznačte myšlenku důkazu skutečnosti, že harmonická řada diverguje. [4 body]
- (c) Na (proti)příkladech vysvětlete, proč o konvergenci řady s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nelze rozhodnout pouze na základě informace, že $\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{a_n} < 1$. [3 body]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasné patrné, že znáte jejich znění.

Celkem teoretická část: [35 bodů]