

**Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)**

1. ročník, zimní semestr – 3. termín dne 29. ledna 2025

**Počtní část**

**Příklad 1.** Spočtete následující limitu posloupnosti (své kroky stručně zdůvodněte): [10 bodů]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{n^2 + n + 1}{n + 2 + n^{-2}} \left( \sqrt{3^n + 3 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

**Příklad 2.** Spočtete následující limitu funkce (své kroky stručně zdůvodněte): [10 bodů]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \sin \frac{5}{x} \right)^{\frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\ln(x + x^4) - \ln(x^4)}}$$

**Příklad 3.** Vyšetřete konvergenci řady: [10 bodů]

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left( \frac{2 + \sin n}{9 + \sin n} \right)^n$$

## Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)

1. ročník, zimní semestr – 3. termín dne 29. ledna 2025

### Teoretická část

#### Úloha A.

- (a) Napište definici Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro posloupnost. [2 body]
- (b) Napište definici derivace funkce v bodě. [2 body]
- (c) Definujte lokální a globální minimum funkce. [2 body]
- (d) Definujte součet řady, absolutní a relativní konvergenci řady. [2 body]
- (e) Zformulujte Heineho větu. [2 body]

#### Úloha B.

- (a) Dokažte, že vlastní limita posloupnosti je jednoznačně určená, pokud existuje. [5 bodů]
- (b) Zformulujte a dokažte větu o limitě složené funkce. [6 bodů]
- (c) Zformulujte a dokažte větu o derivaci inverzní funkce. [5 bodů]

#### Úloha C.

- (a) Rozhodněte o platnosti následujících výroků o reálných funkcích reálné proměnné:
  - (i) Funkce  $\arcsin$  má v některém bodě lokální extrém. [1 bod]
  - (ii) Funkce  $\arccos$  má v některém bodě globální extrém. [1 bod]
  - (iii) Konstantní funkce má v každém bodě extrém. [1 bod]
  - (iv) Funkce  $f(x) = \sqrt{-1 - x^2}$  má extrém v některém bodě svého definičního oboru. [1 bod]
  - (v) Funkce  $f(x) = \sqrt{-1 - x^2}$  má extrém v každém bodě svého definičního oboru. [1 bod]
- (b) Zformulujte a dokažte Lemma o dvou polícajtech *pro funkce*. Můžete bez důkazu použít Heineho větu a Lemma o dvou polícajtech pro posloupnosti (v tom případě Heineho větu zformulujte) nebo tvrzení můžete dokázat přímo z definice limity funkce. [4 body]

---

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.