1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{120} - \left(1+\frac{2}{n}\right)^{80}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{100} + \left(1+\frac{3}{n}\right)^{100} - 2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{120}{n} + \frac{\binom{120}{2}}{n^2} + \dots - \left(1 + \frac{160}{n} + \binom{80}{2}\frac{4}{n^2} + \dots\right)}{1 - \frac{100}{n} + \frac{\binom{100}{2}}{n^2} - \dots + 1 + \frac{300}{n} + \binom{100}{2}\frac{9}{n^2} - 2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\left(120 - 160 + \binom{120}{2}\cdot\frac{1}{n} - \binom{80}{2}\cdot\frac{4}{n} + \dots\right)}{\frac{1}{n}\left(-100 + 300 + \binom{100}{2}\frac{1}{n} + \binom{100}{2}\cdot\frac{9}{n^2} - \dots\right)}$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} \frac{-40 + 0 - 0 + \dots 0}{200 + 0 + 0 + \dots 0} = -\frac{1}{5}$$

<u>Pozn:</u> „…" zastupují vždy konečně mnoho členů s rostoucími mocninami u n.

Proto lze použít VOAL. Např.:

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^k =$$

$$= 1 + 100\cdot\frac{3}{n} + \binom{100}{2}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \binom{100}{99}\left(\frac{3}{n}\right)^{99} + \left(\frac{3}{n}\right)^{100}$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x^2)}}{x \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{1-\cos(x^2)}{x^4} \cdot x^4} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} =$$

$$\overset{(S)}{=} \sqrt{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4}} \cdot \frac{|x^2|}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} =$$

$$\underset{\text{VoAL}}{\overset{(P)}{=}} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-1} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot 1^{-1} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

<u>(S)</u>: Fce $\sqrt{\cdot}$ je spojitá v bodě $\frac{1}{2}$.

Můžeme tedy použít VOLSF (S).

<u>(P)</u>: Vnější $f(y) = \frac{1-\cos y}{y^2}$ $\quad \lim_{y\to 0} f(y) = \frac{1}{2}$

Vnitřní $g(x) = x^2$ $\quad \lim_{x\to 0} g(x) = 0$

(P): $\forall x \in P(0,1): x^2 \neq 0$ zřejmé.

3) $$\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\left(\sqrt{n-5}-\sqrt{n-4}\right)}_{\frac{n-5-(n-4)}{\sqrt{n-5}+\sqrt{n-4}} = \frac{-1}{\sqrt{n-5}+\sqrt{n-4}}} \cdot \sin \frac{1}{n^{2/3}}$$

<u>AK</u>: $\sum_{n=5}^{\infty} |a_n| =$

$$= \sum_{n=5}^{\infty} |(-1)^n| \cdot \frac{|-1|}{\sqrt{n-5}+\sqrt{n-4}} \cdot \left|\sin \underbrace{\frac{1}{n^{2/3}}}_{\in(0,1)}\right| =$$

$\in (0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \frac{1}{n^{3/2}} > 0.$

$$= \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-5}+\sqrt{n-4}} \cdot \sin \frac{1}{n^{2/3}}$$

Srovnáme s řadou $\sum_{n=5}^{\infty} b_n$, kde

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n^{2/3}} :$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-5}+\sqrt{n-4}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{n^{2/3}}}{\frac{1}{n^{2/3}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{5}{n}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}}} \cdot \lim \frac{\sin \frac{1}{n^{2/3}}}{\frac{1}{n^{2/3}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} \cdot 1 = \frac{1}{2} \in (0,\infty).$$

<u>Heineho věta</u>:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x\to 0} f(x) \overset{\text{známá}}{=} 1$$

$$x_n := \frac{1}{n^{2/3}}, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{(H1)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: x_n \neq 0 \quad \text{(H2)}.$$

Tedy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.

<u>Podle LSK (i)</u>: $\sum_{n=5}^{\infty} |a_n|$ K. $\Leftrightarrow \sum_{n=5}^{\infty} b_n$ K.

Ovšem $\sum_{n=5}^{\infty} b_n = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$ K.

Tedy $\sum_{n=5}^{\infty} |a_n|$ K, tj. $\sum a_n$ AK

(a tedy také $\sum a_n$ K).

3K) $\sum_{n=5}^{\infty} a_n =$

$$= \sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{-1}{\sqrt{n-5}+\sqrt{n-4}} \cdot \sin \frac{1}{n^{2/3}}}_{c_n} =$$

$$= -\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \cdot c_n \quad , \text{ kde}$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n-5}+\sqrt{n-4}} \cdot \sin \frac{1}{n^{3/2}} .$$

a) $\lim_{n\to\infty} c_n = \ldots = \frac{1}{\infty+\infty} \cdot \sin 0 = 0$ ✓

b) $\{c_n\}_{n=5}^{\infty}$ je monotónní posl.:

Skutečně: $\sqrt{n-5}$, $\sqrt{n-4}$ jsou rostoucí

$\Rightarrow \sqrt{n-5}+\sqrt{n-4}$ rostoucí

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n-5}+\sqrt{n-4}}$ klesající. Dále:

$\frac{1}{n^{2/3}} \in (0,1) \subseteq \underbrace{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ je klesající

zde je sin rostoucí!

$\Rightarrow \sin \frac{1}{n^{2/3}}$ je klesající.

Celkem: Součin klesajících posl. je (zřejmě!) klesající posl.

Tedy $c_n \searrow 0$, a $\sum_{n=5}^{\infty} a_n$ K.

podle Leibnizova kritéria.

POZN: Protože (jak vidno z předchozí stránky) $\sum_{n=5}^{\infty} a_n$ (dokonce) AK, není nyší uvedené pohrčla (ani postačující) pro úplné řešení úlohy. Za správné použití Leibnizova kritéria je tedy 5 b.

POZN 2: Toto řešení je důkladně rozepsané, v písemce je možné být stručnější.

4) $f(x) = (x^2+5x+6)\cdot \exp(|x-2|-3)$

1 • $D_f = \mathbb{R}$ 1 • Spojitost: $|x-2|$, -3, exp, polynom ... všechny spojité. Aritmetika + skládání spojitých $\Rightarrow$ f spoj. na $\mathbb{R}$.

• symetrie nejsou (sudost, lichost, per.)

• $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = „\infty\cdot\exp(\infty)" = \infty$;

2

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ — " — $= \infty$.

3

• $f'(x) = \Big((x^2+5x+6)\cdot\exp(|x-2|-3)\Big)' =$

$= (2x+5)\cdot\exp(|x-2|-3) +$

$+ (x^2+5x+6)\cdot\exp(|x-2|-3)\cdot \underbrace{\operatorname{sgn}(x-2)}_{=(|x-2|-3)'}$, $x \neq 2$

$= \exp(|x-2|-3)\big(2x+5+(x^2+5x+6)\operatorname{sgn}(x-2)\big)$

pro $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$. Pro $x = 2$ neexistuje derivace „vnitřní fce" $|x-2|-3$, a tedy vzorec nemusí platit.

• Intervaly monotonie: $\exp(|x-2|-3) \overset{x\in\mathbb{R}}{>} 0$.

$\underline{x>2}$: $2x+5 + x^2+5x+6 = x^2+7x+11 > 0$

$x_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{49-44}}{2} = \frac{-7\pm\sqrt{5}}{2} < 0$

oba kořeny.

Tedy: fce roste na $(2,\infty)$

$\underline{x<2}$: $2x+5-(x^2+5x+6) = -x^2-3x-1 > 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2+3x+1 < 0$ $\qquad \frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

$\sqrt{5} \approx 2{,}2$ ... $\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}4$, $\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \approx -2{,}6$

3

$x \in$:	$\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$	$(2,\infty)$
f'	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

• Extrémy: • $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ bod lokálního minima,

1 $f\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) < 0$ ... přesná hodnota netřeba

• $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ ... lok. maximum

• $x = 2$ ... lok. min.,

$f(2) = e^{-3}\cdot(4+10+6) = 20e^{-3} > 0$

• $H_f = \left[f\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right), \infty\right)$

2

• Jednostranné derivace v bodě $x = 2$:

$f'(2_+) \overset{\text{v. o lim. der.}}{=} \lim\limits_{x\to 2_+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2_+} \exp(|x-2|-3)(x^2+7x+11)$

$= e^{-3}\cdot(4+14+11) = 29e^{-3}$

$f'(2_-) = \lim\limits_{x\to 2_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2_-} \exp(|x-2|-3)\cdot(-x^2-3x-1$

$= e^{-3}\cdot(-4-6-1) = -11e^{-3}$

$$f'(x) =$$
$$= \exp\left(|x-2|-3\right)\left(2x+5+(x^2+5x+6)\,\mathrm{sgn}(x-2)\right)$$

$\underline{x>2:}$ $\quad f'(x) = \exp(x-5)(x^2+7x+11)$

1

$$f''(x) = \exp(x-5)(x^2+7x+11) +$$
$$+\exp(x-5)(2x+7) =$$
$$= \exp(x-5)(x^2+9x+18)$$
$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81-72}}{2} = \frac{-9\pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} -6 \\ -3 \end{matrix} \right.$$

Tedy $f'' > 0$ na $(2,\infty)$.

$\underline{x<2:}$ $\quad f'(x) = -\exp(-x-1)(x^2+3x+1)$

$$f''(x) = -\exp(-x-1)\cdot(-1)(x^2+3x+1) -$$
$$-\exp(-x-1)(2x+3) =$$
$$= \exp(-x-1)(x^2+3x+1-2x-3) =$$
$$= \exp(-x-1)(x^2+x-2)$$

1 $\quad \dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(-2)}}{2} = \dfrac{-1\pm 3}{2} \left\langle \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \right.$

1

$x \in:$	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
f''	+	−	+	+
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

- Inflexní body: $x=-2$, $x=1$.

4b