1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3^n+1)}{\sqrt[3]{n^3+2n^2} - \sqrt[3]{n^2+2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(3^n\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\right)}{n\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} - n^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\cdot\left(\ln 3 + \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\right)}{\cancel{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}\right)} \overset{\text{VOAL}}{=}$$

$$\frac{\ln 3 + \lim \frac{1}{n}\cdot \lim \ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}{\lim \sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} - \lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot \lim \sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}} \overset{\text{H.V.}}{=}$$

$$= \frac{\ln 3 + 0\cdot \ln(1+0)}{\sqrt[3]{1+0} - \frac{1}{\infty}\cdot\sqrt[3]{1+0}} = \underline{\underline{\ln 3}}$$

„H.V.": Funkce ln je spojitá v bodě 1, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3^n}\right) = 1$. Tedy:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right) = \ln 1 = 0.$$

Používáme také: „lim. odmocniny je odmocnina limity."

2

2. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} =$

$$= \lim_{x\to 0} \exp\Big(\underbrace{\frac{1}{\sin^2 x}\cdot \ln(\cos x)}\Big) \overset{\text{VOLSF (S)}}{=} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x}\cdot \ln(\cos x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot \frac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1}\cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \overset{\text{VOAL}}{=}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^{-2}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1}\cdot\left(-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$\overset{\text{VOLSF}}{=} 1^{-2}\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

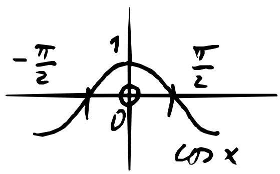
VOLSF: $f(y) = \frac{\ln y}{y-1}$, $\lim\limits_{y\to 1} f(y) \overset{\text{známá}}{=} \boxed{1}$

2

$g(x) = \cos x$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$

(P) … $\delta := \frac{\pi}{2}$ (např.) … platí

$\forall x \in P(0, \frac{\pi}{2}) : \cos x \neq 1$



Tedy: $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{\cos x - 1} = \boxed{1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

5 **KONVERGENCE**: • 2 $\sqrt{n}$ rostoucí $\Rightarrow$

$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{n}}$ klesající

$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ je klesající

(také proto, že fce ln je rostoucí).

• 2 $\lim \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \ln 1 = 0$.

1 Leibnizovo kritérium: řada K.

5 **ABSOLUTNÍ K.**: $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| =$

2 $= \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n| \cdot \left|\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Srovnáme s řadou $\sum b_n$, kde

$b_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \overset{(*)}{=} 1 \in (0,\infty)$.

1 (*): použijeme Heineho V. & zn. limitu.

1 Podle LSK: $\sum |a_n|$ K. $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ K.

1 Avšem $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$ D.

Celkem: Řada RK.

④ $f(x) = |x| + \operatorname{arctg}|x-1|$

1 • $D_f = \mathbb{R}$, fce je na $\mathbb{R}$ spojitá

• není lichá, sudá ani periodická.

1 • $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty + \frac{\pi}{2} = \infty$

2 • Asymptoty: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x} + \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg}|x-1| =$$

$$= \begin{cases} -1, & x\to-\infty \\ 1, & x\to\infty. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to\infty} \left(|x| + \operatorname{arctg}|x-1| - x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(x + \operatorname{arctg}(x-1) - x\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - (-1)x\right) = \dots = \frac{\pi}{2}$$

Asymptota v ∞: $y = x + \frac{\pi}{2}$;

— " — v $-\infty$: $y = -x + \frac{\pi}{2}$.

$f'(x) = \operatorname{sgn} x + \frac{1}{1+(x-1)^2} \cdot \operatorname{sgn}(x-1)$

Po intervalech: $x \in [1, \infty)$:

3

$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+(x-1)^2} > 0 \, , \; x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ je rostoucí na $[1, \infty)$.

$x \in (-\infty, 0)$: $f'(x) = -\left(1 + \frac{1}{1+(x-1)^2}\right) < 0 \, , \; x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ je klesající na $(-\infty, 0)$.

$x \in [0, 1)$: $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+(x-1)^2} > 0 \, , \; x \neq 1$.

(Jmenovatel $\geq 1 \Rightarrow$ zlomek ≤ 1)

Tedy f je rostoucí na $[0, 1)$.

2 $x \in$	$(-\infty, 0)$	$[0, 1)$	$[1, \infty)$
f'	$-$	$+$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Extrémy: globální (i lokální) minimum

1 v bodě 0: $f(0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Jednostranné derivace v bodech $0, 1$:

2 $f'_-(0) = \lim_{x \to 0_-} f'(x) = \lim_{x \to 0_-} \left(-1 - \frac{1}{1+(x-1)^2}\right) = -\frac{3}{2}$

$f'_+(0) = \ldots = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$f'_-(1) = \lim_{x \to 1_-} \left(1 - \frac{1}{1+(x-1)^2}\right) = 0$

$f'_+(1) = \ldots = 1 + 1 = 2$

(Vše podle V. o limitě derivace: fce je v bodech 0 a 1 spojitá!)

3

$x \in [1, \infty)$: $f''(x) = \left(1 + \frac{1}{1+(x-1)^2}\right)'$

$= \left(\frac{1}{x^2-2x+2}\right)' = -\frac{2x-2}{(x^2-2x+2)^2} =$

$= -2 \cdot \frac{x-1}{(\dots)^2} < 0, \quad x > 1.$

Tedy f je konkávní na $[1, \infty)$.

$x \in (-\infty, 0)$: $f''(x) = \frac{2x-2}{(x^2-2x+2)^2} < 0, \quad x < 1$

Tedy f je konkávní na $(-\infty, 0]$

$x \in [0, 1)$: $f''(x) = \frac{2x-2}{(\dots)^2} < 0, \quad x < 1$

Tedy f je konkávní na $[0, 1]$.

Inflexní body tedy nejsou.

5b