Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 4. termín dne 24. ledna 2022

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu posloupnosti [**10** bodů]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{7\cdot 3^n}-3}{n\cdot\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)}.$$

Příklad 2. Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce [**10** bodů]

$$\lim_{x\to 4} \frac{\arcsin(x-4)}{\sqrt{x^2+20}-\sqrt{4x+20}}.$$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady [**10** bodů]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n\Big(\ln\big((n+1)!+1\big)-\ln\big((n+1)!\big)\Big).$$

Příklad 4. Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem [**20** bodů]

$$f(x)=2\cos^2 x+\sin^2(2x).$$

Součástí řešení je také náčrt grafu, který souhlasí s vašimi výpočty a závěry.
Nezapomeňte vyšetřit též: limity v krajních bodech a bodech nespojitosti, jednostrannou spojitost a derivace, lokální extrémy, intervaly monotonie a konvexity, inflexní body, obor hodnot, asymptoty.

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 4. termín dne 24. ledna 2022

Teoretická část

Úloha A.

(a) Napište definici vlastní limity funkce ve vlastním bodě. [**2** body]

(b) Definujte lokální minimum funkce. [**2** body]

(c) Napište definici asymptoty funkce v ∞. [**2** body]

(d) Zformulujte Weierstrassovu větu. [**2** body]

(e) Zformulujte Riemannovu větu o přerovnání řad. [**2** body]

Úloha B.

(a) Z definice dokažte, že konstantní funkce má nulovou derivaci. [**2** body]

(b) Zformulujte a dokažte Rolleovu větu. Pomocná tvrzení zformulujte bez důkazu. [**6** bodů]

(c) Zformulujte a dokažte Leibnizovo kritérium konvergence nekonečných řad. [**7** bodů]

Úloha C.

(a) Rozhodněte o platnosti následujících výroků o reálných funkcích reálné proměnné:

- (i) Funkce arcsin má v některém bodě lokální extrém. [**1** bod]
- (ii) Funkce arccos má v některém bodě globální extrém. [**1** bod]
- (iii) Konstantní funkce má v každém bodě extrém. [**1** bod]
- (iv) Funkce $f(x) = \sqrt{-1 - x^2}$ má extrém v některém bodě svého definičního oboru. [**1** bod]
- (v) Funkce $f(x) = \sqrt{-1 - x^2}$ má extrém v každém bodě svého definičního oboru. [**1** bod]

(b) Zformulujte a dokažte Lemma o dvou policajtech *pro funkce.* Můžete bez důkazu použít Heineho větu a Lemma o dvou policajtech pro posloupnosti (v tom případě Heineho větu zformulujte) nebo tvrzení můžete dokázat přímo z definice limity funkce. [**5** bodů]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte a dokažte Bolzanovu větu. [**12** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte l'Hospitalovo pravidlo „typu $\frac{0}{0}$“. [**15** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.