Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 6. termín dne 10. února 2022

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu posloupnosti [**10** bodů]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{1-\cos \frac{1}{n}} \cdot \left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right).$$

Příklad 2. Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce [**10** bodů]

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{3x^2+1}{3x^2+2}}\right)^{x^2}$$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady [**10** bodů]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+1}{n}\right)^n \sin\left(7^{-n}\right).$$

Příklad 4. Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem [**20** bodů]

$$f(x) = (x^2+3x+2)\cdot e^{|x-3|+3}.$$

Součástí řešení je také náčrt grafu, který souhlasí s vašimi výpočty a závěry.
Nezapomeňte vyšetřit též: limity v krajních bodech a bodech nespojitosti, jednostrannou spojitost a derivace, lokální extrémy, intervaly monotonie a konvexity, inflexní body, obor hodnot, asymptoty.

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 6. termín dne 10. února 2022

Teoretická část

Úloha A.

(a) Napište definici Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro posloupnost. [**2** body]

(b) Napište definici derivace funkce v bodě. [**2** body]

(c) Napište, co se myslí výrokem, že „funkce f je rostoucí v bodě a“. [**2** body]

(d) Definujte součet řady, absolutní a relativní konvergenci řady. [**2** body]

(e) Zformulujte větu o derivaci inverzní funkce. [**2** body]

Úloha B.

(a) Zformulujte a dokažte Lemma o dvou policajtech pro posloupnosti. [**5** bodů]

(b) Dokažte, že limita součinu dvou posloupností je součin jejich limit. [**7** bodů]
Uvažujte pouze situaci, kdy limity obou posloupností jsou vlastní.

(c) Zformulujte a dokažte Leibnizovo kritérium konvergence nekonečných řad. [**7** bodů]

Úloha C. Definujme funkci f předpisem $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Dokažte: [**6** bodů]

(a) f je prostá; (*Nápověda: vyšetřete derivaci f.*)

(b) definiční obor inverzní funkce f^{-1} je $\mathbb{R}$;

(c) pomocí věty o derivaci inverzní funkce spočítejte $(f^{-1})'(y_0)$, kde $y_0 = f(1) = \frac{e - \frac{1}{e}}{2}$.

(d) Napište rovnici tečny k f^{-1} v bodě y_0.

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte a dokažte Heineho větu. [**14** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte l'Hospitalovo pravidlo „typu $\frac{0}{0}$“. [**15** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.