A1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^{x+\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{(x+\ln x)\cdot\ln\left(\frac{x-4}{x+4}\right)} = \underline{\underline{e^{-8}}}$

Limita exponentu: $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\ln x)\cdot\ln\left(\frac{x-4}{x+4}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)\cdot\ln\left(\frac{x+4-8}{x+4}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)\cdot$

$\cdot \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{-8}{x+4}\right)}{\frac{-8}{x+4}}\cdot\frac{-8}{x+4} \overset{\text{VOLSF}}{=} (1+0)\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8x}{x+4} =$

VOLSF: vnější $f(y) = \frac{\ln(1+y)}{y}$, $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = 1$ (známá)

vnitřní $g(x) = \frac{-8}{x+4}$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \underline{\underline{0}}$

(P): Dokonce $\forall x\in(0,\infty): g(x) \neq \underline{\underline{0}}$.

$= \lim \frac{-8}{1+\frac{4}{x}} = \frac{-8}{1+0} = \underline{\underline{-8}}$.

A2) $f'(x) = \left(\sin\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)\cdot\log x\right)' =$

$= \cos\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)'\cdot\log x + \sin\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)\cdot\frac{1}{x} =$

$= \cos\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)\cdot\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}\cdot\log x + \sin\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)\cdot\frac{1}{x}$.

A3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt{n}\,(n^2+1)}\right)\cdot \operatorname{arctg} n \cdot \log n}_{=:\, a_n}$$

Najdeme vhodnou „srovnávací" řadu $\sum b_n$.

- argument fce sin má limitu nula $\Longrightarrow$

$\sin(\dots) \approx \dots$, kde $\dots = \dfrac{n^{\frac{4}{3}}}{n^{\frac{5}{2}}+\sqrt{n}} \approx n^{\frac{4}{3}-\frac{5}{2}} = n^{-\frac{7}{6}}$

$\left[\ \frac{4}{3}-\frac{5}{2} = \frac{8-15}{6} = \frac{-7}{6}\ \right]$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}$, nebude tedy mít vliv na konvergenci / divergenci

$\Longrightarrow$ arctg n můžeme „ignorovat".

- $\log n \to \infty$, ale velmi pomalu $\Rightarrow$ „kazí" to jen trochu.

Celkem: Stačí vzít $\sum b_n$, která konverguje „trochu hůř" než $\sum \frac{1}{n^{7/6}} = \sum \frac{1}{n^{14/12}}$

Třeba $b_n := \frac{1}{n^{13/12}}$ (pak $\sum b_n$ K.).

SROVNÁNÍ pomocí lim. srovnávacího kritéria:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\frac{\sin(\dots)}{\dots}}^{\to 1} \cdot \frac{\dots}{b_n} \cdot \operatorname{arctg} n \cdot \log n =$$

$$= 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n \cdot \lim \frac{\frac{n^{4/3}}{\sqrt{n}\,(n^2+1)} \cdot \log n}{\frac{1}{n^{13/12}}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \lim \frac{n^{\frac{4}{3}+\frac{13}{12}} \cdot \log n}{n^{5/2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(1+0)} \cdot \lim \frac{n^{29/12} \cdot \log n}{n^{30/12}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \lim \frac{\log n}{n^{\frac{1}{12}}} = 0.$$

Podle LSK tedy platí implikace:

$$\left(\sum b_n \ K \implies \sum a_n \ K \right),$$

a tedy (protože $\sum b_n$ K, jak víme) $\sum a_n$ K.

Jde o řadu s nezápornými členy, takže i AK.

B1) $$\lim_{n\to\infty} \ln(n^3+3^n)\cdot\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$$

Pomocí Heineho V. převedeme na lim. fce

$$= \lim_{x\to\infty} \ln(x^3+3^x)\cdot\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln\left(3^x\left(1+\frac{x^3}{3^x}\right)\right)\cdot\left(e^{\frac{1}{x}\cdot\ln 3}-1\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln 3+\underbrace{\ln\left(1+\frac{x^3}{3^x}\right)}_{\to 0}\right)\cdot \cancel{\lim}\ \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{x}\cdot\ln 3}-1}{\frac{1}{x}\cdot\ln 3}}_{\text{VOLSF}: \to 1}\cdot\frac{\ln 3}{x} =$$

$$= \lim \frac{e^{\frac{1}{x}\cdot\ln 3}-1}{\frac{1}{x}\ln 3}\cdot \lim\left(\ln^2 3+\frac{\ln 3\cdot\ln\left(1+\frac{x^3}{3^x}\right)}{x}\right) =$$

$$= 1\cdot\left(\ln^2 3+\frac{\ln 3\cdot 0}{\infty}\right) = \underline{\underline{\ln^2 3}}.$$

VOLSF: vnější $f(y)=\dfrac{e^y-1}{y}$ $\qquad \lim\limits_{y\to 0} f(y)=1$ (známá)

vnitřní $g(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln 3$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$

(P): dokonce $\forall x\in(0,\infty): g(x)\neq 0.$

B2) $$\left(7^{\frac{6x^3+\log x+5}{\cos x}}\right)' = \ln 7\cdot 7^{\frac{6x^3+\log x+5}{\cos x}}\cdot\left(\frac{6x^3+\log x+5}{\cos x}\right)'$$

$$= \ln 7\cdot 7^{\cdots}\cdot\frac{\left(18x^2+\frac{1}{x}\right)\cdot\cos x-\left(6x^3+\log x+5\right)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

B3) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(\ln(n^3+n^2)-\ln(n^3+1)\Big)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\ln\frac{n^3+n^2}{n^3+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{n^2-1}{n^3+1}\right)=:\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$$\left[\frac{n^3+n^2}{n^3+1}=\frac{n^3+1+n^2-1}{n^3+1}=1+\frac{n^2-1}{n^3+1}\right]$$

Absolutní konvergence: $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\ln\left(1+\frac{n^2-1}{n^3+1}\right)\right|$,

ovšem $\frac{n^2-1}{n^3+1}\geq 0$ pro $n\in\mathbb{N}$, takže abs. h. není třeba.

$$\sum|a_n|=\sum\underbrace{\ln\Big(1+\overbrace{\frac{n^2-1}{n^3+1}}^{\sim\frac{1}{n}\to 0}\Big)}_{\sim\frac{1}{n}}$$ srovnej s $\sum b_n$, kde $b_n:=\frac{1}{n}$:

$$\lim\frac{|a_n|}{b_n}=\lim\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{n^2-1}{n^3+1}\right)}{\frac{n^2-1}{n^3+1}}}_{\to 1}\cdot\frac{\frac{n^2-1}{n^3+1}}{\frac{1}{n}}=$$

Heine + VOLSF + známá lim.

$$=1\cdot\lim\frac{n\cdot(n^2-1)}{n^3+1}=\ldots=1\in(0,\infty)$$, takže

podle LSK platí ekvivalence ($\sum|a_n|$ K. $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ K.)

Ale $\sum b_n=\sum\frac{1}{n}$ je tzv. harmonická řada,

o níž víme, že D. Proto i $\sum|a_n|$ D.

B3 pokračování) konvergence:

Podle Leibnizova kritéria řada

$$\sum (-1)^n \cdot \ln\left(1+\frac{n^2-1}{n^3+1}\right)$$ konverguje, pokud

$\left\{\ln\left(1+\frac{n^2-1}{n^3+1}\right)\right\}$ je monotónní a má limitu 0.

- Že má lim. 0, víme.
- Monotonie: Funkce ln je rostoucí, stačí tedy ověřit monotonii argumentu.

Uvažujme tedy fci $f(x) = 1 + \frac{x^2-1}{x^3+1}$.

Pak $f'(x) = 0 + \left(\frac{x^2-1}{x^3+1}\right)' = \frac{2x\cdot(x^3+1) - (x^2-1)3x^2}{(x^3+1)^2} =$

$$= \frac{2x^4 + 2x - 3x^4 + 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^3+1)^2}.$$

Znaménko derivace záleží pouze na čitateli (jmenovatel je >0), který má limitu $-\infty$. Je tedy zřejmé, že od jistého x_0 je f' záporná.

(Tj. $\exists x_0 \in \mathbb{R}\ \forall x \in (x_0, \infty): f'(x) < 0$).

Samozřejmě tedy i od jistého $n_0 \in \mathbb{N}$ (třeba $n_0 = \lceil x_0 \rceil$)

Tedy $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{n^2-1}{n^3+1}\right)$ K., a tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K.