Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 1. termín dne 21. května 2024

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu [**15** bodů]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x^2 \cdot \cos x}{x^2 - \sin(x^2)}.$$

Příklad 2. Spočtěte integrál [**20** bodů]

$$\int \frac{3\sin x \cos x + \cos x}{\cos^2 x - \sin x \cos^2 x - 3}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3. Spočtěte objem tělesa vzniklého rotací kolem osy x plochy určené funkcí f na intervalu $[0, 2]$, kde

$$f(x) = \min\left\{\sqrt{x}, \frac{1}{x}\right\}, \quad x \in [0, 2].$$

Nápověda: Nakreslete si obrázek. Ve kterém bodě se protínají grafy funkcí $\sqrt{x}$ a $\frac{1}{x}$? [**15** bodů]

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 1. termín dne 21. května 2024

Teoretická část

Úloha A.

(a) Definujte symbol „malé o“ a symbol „$\sim$“. [**2** body]

(b) Zformulujte Taylorovu větu s Peanovým tvarem zbytku. [**2** body]

(c) Definujte stejnoměrnou spojitost funkce na intervalu. [**2** body]

(d) Definujte (Darbouxův) horní integrální součet $S(f, D)$. [**2** body]

(e) Zformulujte Bolzanovu-Cauchyovu podmínku pro existenci Riemannova určitého integrálu („Klíčové lemma“). [**2** body]

Úloha B.

(a) Nechť g_1, g_2 a f jsou funkce definované na okolí bodu a.
Nechť platí $g_1(x) \sim g_2(x),\ x \to a$. Dokažte, že potom [**5** bodů]

$$f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a.$$

(b) Zformulujte a dokažte Newtonovu-Leibnizovu formuli pro Riemannův integrál. Klíčovou větu (hovořící o integrálu jako funkci horní meze a o derivaci této funkce), kterou k tomu použijete, zformulujte bez důkazu. [**6** bodů]

(c) Zformulujte a dokažte pravidlo Per Partes pro neurčitý integrál. [**5** bodů]

Úloha C.

(a) Najděte hodnoty parametrů $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pro které platí [**5** bodů]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} + a + bx + cx^2 + dx^3}{x^4} \in \mathbb{R}.$$

(b) Nechť $c, b, a \in \mathbb{R}$, $c < b < a$. Nechť $f \in \mathcal{R}([c, a])$. Dokažte, že $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$.
K důkazu použijte platnost této rovnosti v každé situaci, kdy $a < c < b$. [**5** bodů]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Nechť f je spojitá na $[a, b]$. Dokažte, že existuje Riemannův integrál $\int_a^b f$. [**14** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte větu o Taylorově polynomu s Lagrangeovým tvarem zbytku. [**14** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.