Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 2. termín dne 30. května 2024

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu [**15** bodů]

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x \ln(1+x^2)}.$$

Příklad 2. Spočtěte integrál [**25** bodů]

$$\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{4\cos^2 x + 9\sin^2 x} \,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3. Spočtěte délku křivky [**10** bodů]

$$y = x^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Použijte k tomu vzorec pro délku grafu funkce f na intervalu $[a,b]$:

$$\ell\big(f,[a,b]\big) = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x$$

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 2. termín dne 30. května 2024

Teoretická část

Úloha A.

(a) Zformulujte Taylorovu větu s Peanovým tvarem zbytku. [**2** body]

(b) Vyjádřete Eulerovo číslo e jako součet nekonečné řady. [**1** bod]

(c) Napište úplnou Darbouxovu definici Riemannova integrálu. [**5** bodů]

(d) Zformulujte Bolzanovu-Cauchyovu podmínku pro existenci Riemannova určitého integrálu („Klíčové lemma“). [**2** body]

Úloha B.

(a) Buďte F, G primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b). Dokažte, že existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $\forall x \in (a, b)\colon F(x) = G(x) + c$. [**5** bodů]

(b) Zformulujte a dokažte 1. Větu o substituci pro neurčitý integrál. [**5** bodů]

(c) Nechť D, D' jsou dělení intervalu $[a, b]$ a D' je zjemnění D. Buď $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená. Dokažte, že $S(f, D') \leqslant S(f, D)$. [**6** bodů]

Úloha C.

(a) Standardním trikem (nebo jinak) spočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$. [**5** bodů]

(b) Rozhodněte o obecné platnosti následujících výroků (stručně zdůvodněte): [**5** bodů]

(a) Je-li $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ spojitá, pak je také stejnoměrně spojitá.
(b) Libovolná spojitá funkce na otevřeném intervalu tam má primitivní funkci.
(c) Jestliže $f(x) = o(x^5),\ x \to 0$, pak také $f(x) = o(x^6),\ x \to 0$.
(d) Každý polynom P stupně 5 je jednozn. určen hodnotami své 0. až 4. derivace v bodě $x = 13$.
(e) $\forall P$ polynom $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon P^{(n)}(x) = 0$.

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte a dokažte Základní větu kalkulu. [**14** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte Taylorovu větu s Peanovým tvarem zbytku a dokažte ji. K důkazu použijete lemmata:

- Pokud $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$, pak $f(x) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a$;
- Pokud P je polynom stupně nejvýše n a $P(x) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a$, pak $P \equiv 0$ na $\mathbb{R}$.

Obě lemmata dokažte. (Můžete použít i jiná podobná tvrzení; pokud se tak rozhodnete, zformulujte je a dokažte.) [**14** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.