**Písemka z matematické analýzy pro učitele** (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 1. termín dne 12. ledna 2021

## Početní část

**Příklad 1.** Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' \cdot \sin x \cdot \cos x - y = 0. \qquad [\mathbf{20}\ \text{bodů}]$$

**Příklad 2.** Proveďte kvalitativní analýzu následující rovnice a nakreslete graf zachycující chování všech maximálních řešení:

$$y' = y \cdot \sqrt{1 - y^2} \qquad [\mathbf{15}\ \text{bodů}]$$

**Příklad 3.** Najděte všechna maximální řešení následující rovnice:

$$y' + 2xy = 2x^3. \qquad [\mathbf{15}\ \text{bodů}]$$

Určete to maximální řešení, které splňuje počáteční podmínku $y(0) = 2$.

---

**Hodnocení:**

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **26** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

**Písemka z matematické analýzy pro učitele** (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 1. termín dne 12. ledna 2021

**Teoretická část**

### Úloha A.

(a) Definujte prodloužení řešení a maximální řešení diferenciální rovnice. [**2** body]

(b) Definujte parciální derivace funkce dvou proměnných. [**2** body]

(c) Zformulujte Picardovu větu o existenci a jednoznačnosti řešení rovnice. [**2** body]

(d) Zformulujte Abelovo kritérium konvergence nekonečných řad. [**2** body]

### Úloha B.

(a) Nechť $p$ a $q$ jsou spojité funkce na intervalu $(a, b)$. Dokažte, že každé řešení rovnice $y' + py = q$, které je definované na $(a, b)$, má na $(a, b)$ spojitou derivaci. [**5** bodů]

(b) Podrobně dokažte, že řešení homogenní lineární diferenciální rovnice $n$-tého řádu tvoří lineární prostor. (Nemusíte dokazovat, že jeho dimenze je $n$.) [**5** bodů]

### Úloha C.

(a) Budiž $y(x)$ nějaké řešení rovnice $y' = \sin y + \cos y$. Je $y$ nutně monotónní? [**3** body]

(b) Je každé řešení obecné diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ spojitá funkce? Stručně zdůvodněte. [**3** body]

(c) Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n \cdot \log \log n}.$$

[**5** bodů]

(d) Načrtněte a popište maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{y \cdot \sqrt[5]{y+1}}{y^2 - 4}.$$

Rovnici neřešte a nemusíte ani vyšetřovat konv. integrálů (pokud víte, jak to dopadne), stačí nakreslit přibližný obrázek obsahující také informaci o možnostech lepení řešení. [**5** bodů]

### Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Dokažte, že každé řešení autonomní diferenciální rovnice je monotónní. [**16** bodů]

**Nebo:**

(b) Zformulujte srovnávací kritérium pro konvergenci určitého integrálu a s jeho pomocí dokažte limitní verzi tohoto kritéria (kterou také zformulujte). [**10** bodů]

---

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.