Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 1. termín dne 16. ledna 2023

Početní část

Příklad 1. Najděte všechna maximální řešení následující rovnice:

$$y' = \frac{e^y}{x(1+x^2)}. \qquad [\mathbf{15}\text{ bodů}]$$

Příklad 2. Proveďte kvalitativní analýzu následující rovnice a nakreslete graf zachycující chování všech maximálních řešení:

$$y' = \frac{\ln(y+6)\sqrt[3]{y}}{y^5+32}. \qquad [\mathbf{15}\text{ bodů}]$$

Příklad 3. Najděte všechna maximální řešení následujících lineárních rovnic a u první rovnice navíc maximální řešení splňující danou počáteční podmínku.

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = x^2, \qquad y(1) = \pi. \qquad [\mathbf{10}\text{ bodů}]$$

$$y^{(4)} = y. \qquad [\mathbf{10}\text{ bodů}]$$

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **26** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 1. termín dne 16. ledna 2023

Teoretická část

Úloha A.

(a) Definujte prodloužení řešení a maximální řešení diferenciální rovnice. [**2** body]

(b) Zformulujte Peanovu větu o existenci řešení jistého typu diferenciální rovnice. [**2** body]

(c) Vysvětlete, co rozumíme pojmem fundamentální systém. [**2** body]

(d) Zformulujte větu o existenci a jednoznačnosti řešení lineární rovnice n-tého řádu. [**2** body]

(e) Zformulujte integrální kritérium konvergence řad. [**2** body]

Úloha B.

(a) Uvažujme nějaké řešení y úlohy $y' = g(y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$. Dokažte, že pokud $g(y_0) < 0$, pak je funkce y na svém definičním oboru nerostoucí. [**3** body]

(b) Definujte množiny funkcí $C(a, b)$, $C^k(a, b)$ ($k \in \mathbb{N}$), $C^\infty(a, b)$ a dokažte, že se (s vhodnými operacemi) jedná o vektorové prostory. Můžete se opřít o fakt, že množina všech reálných funkcí na (a, b) tvoří vektorový prostor. [**6** bodů]

(c) Nechť y je řešení diferenciální rovnice tvaru $y' = g(y)$ na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Dokažte, že pak $y_c(x) := y(x - c)$ je rovněž řešení. Nezapomeňte upřesnit interval, na kterém se jedná o řešení. [**5** bodů]

Úloha C.

(a) Napište obecnou lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty. Dokažte, že každé její řešení je třídy C^n. [**5** bodů]

(b) Rovnici $y' = h(x)g(y)$ převádíme do tvaru $\frac{y'}{g(y)} = h(x)$ a pak integrujeme. Vysvětlete, v jakém smyslu „integrujeme levou stranu podle y a pravou stranu podle x“, resp. proč je tento postup v pořádku. [**5** bodů]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Napište obecnou homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty. Dokažte, že množina všech jejích maximálních řešení tvoří vektorový prostor dimenze n. [**16** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte srovnávací kritérium pro konvergenci určitého integrálu a s jeho pomocí dokažte limitní verzi tohoto kritéria (kterou také zformulujte). [**10** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.