Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 2. termín dne 27. ledna 2021

Početní část

Příklad 1. Najděte maximální řešení úlohy s počáteční podmínkou

$$y' = x^2 e^x \cdot y, \quad y(2) = 1$$ [**20** bodů]

Příklad 2. Proveďte kvalitativní analýzu následující rovnice a nakreslete graf zachycující chování všech maximálních řešení:

$$y' = \sqrt[3]{\operatorname{tg} y} \cdot \sqrt{y^4 - y^2}$$ [**15** bodů]

Příklad 3. Najděte všechna maximální řešení následující rovnice:

$$y''' + y' - 10y = 0.$$ [**15** bodů]

Určete to maximální řešení, které splňuje počáteční podmínky

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0.$$

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **26** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 2. termín dne 27. ledna 2021

Teoretická část

Úloha A.

(a) Napište obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu v nejobecnějším tvaru a definujte pojem řešení takové rovnice. [**2** body]

(b) Zformulujte Peanovu větu o existenci řešení jistého typu diferenciální rovnice. [**2** body]

(c) Zformulujte Dirichletovo kritérium konvergence nekonečných řad. [**2** body]

(d) Zformulujte větu o existenci a jednoznačnosti řešení lineární rovnice 1. řádu. [**2** body]

(e) Definujte limitu posloupnosti komplexních čísel. [**2** body]

Úloha B.

(a) Zformulujte a dokažte srovnávací kritérium konvergence Zobecněného Riemannova integrálu. Stačí dokázat existenci $\int_a^b |f|$, nemusíte dokazovat existenci $\int_a^b f$. [**6** bodů]

(b) Definujte množiny funkcí $C(a,b)$, $C^k(a,b)$ $(k \in \mathbb{N})$, $C^\infty(a,b)$ a dokažte, že se (s vhodnými operacemi) jedná o vektorové prostory. Můžete se opřít o fakt, že množina všech reálných funkcí na (a,b) tvoří vektorový prostor. [**6** bodů]

Úloha C.

(a) Budiž $y(x)$ nějaké řešení rovnice $y' = \sin y + \cos y$. Je y nutně monotónní? [**3** body]

(b) Rozhodněte o platnosti následujícího výroku a své tvrzení dokažte: Buďte p, q_1, q_2 spojité funkce na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Nechť y_1 je na intervalu I řešení rovnice $y' + py = q_1$ a y_2 je na tomtéž intervalu řešení rovnice $y' + py = q_2$. Potom $y_1 - y_2$ je na I řešení rovnice $y' + py = q_1 - q_2$. [**4** body]

(c) Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n \cdot \log \log n}.$$ [**5** bodů]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte a dokažte lemma, které říká, že (za jistých předpokladů) hodnoty maximálního řešení autonomní rovnice pokrývají celý interval (a,b). [**16** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte integrální kritérium konvergence nekonečných řad. [**12** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.